

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 7 gennaio 1917.*

A. RÖRTI, Vicepresidente.

## MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

~~~~~

Chimica vegetale. — *Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante.* Nota I del Socio G. CIAMICIAN e di C. RAVENNA.

Le sostanze che costituiscono gli organismi vegetali possono essere distinte in due gruppi: l'uno comprende i composti organici indispensabili alla vita, come i grassi, gli zuccheri semplici e complessi e le proteine; l'altro tutte quelle sostanze che si sogliono chiamare accessorie, come i glucosidi, gli alcaloidi, le materie coloranti (oltre la clorofilla la di cui funzione è ben nota), le essenze, le resine ecc. Mentre sul significato chimico e biologico delle prime non esiste alcuna divergenza di vedute, essendo tutti concordi nel riconoscere la loro importanza per la vita organica, regna ancora grande incertezza intorno alla funzione delle seconde. La divergenza su questo argomento va anzi tanto oltre, che mentre alcuni autori considerano queste ultime come materiali di riserva, che le piante possono utilizzare in dati momenti del loro sviluppo, altri le riguardano come materiali escrementizi, di cui le piante non possono liberarsi, mancando esse di organi escretori.

Di questa opinione è segnatamente il Pictet, che espose le proprie idee su questo importante argomento in varie occasioni e segnatamente in un interessante discorso pronunciato alla Società elvetica di scienze naturali a Ginevra nel settembre 1915 <sup>(1)</sup>. In esso egli fa notare sopra tutto che le

<sup>(1)</sup> Amé Pictet, *La structure moléculaire et la vie*, in Archives des Sciences physiques et naturelles, IV, vol. 40, pag. 181.

sostanze accessorie appartengono ai composti ciclici, mentre in genere quelle fondamentali contengono catene aperte di atomi di carbonio, e trova in questa differente struttura la differenza fra le materie organiche della vita e quelle che ad essa non possono più prender parte. Egli conclude col dire che la pianta ideale, di queste ultime non dovrebbe contenerne affatto. Noi non vogliamo entrare qui in un particolareggiato esame delle obiezioni che si potrebbero muovere a queste vedute, ma non possiamo astenerci dall'affermare che la conclusione non ci sembra molto verisimile. Non può apparire probabile che le piante fabbrichino dai rifiuti del mirabile processo di sintesi organica che in esse si compie, sostanze così complesse come sono ad esempio molti alcaloidi per il solo scopo di renderle innocue al loro organismo, tanto più che queste cosiddette inutilità organiche vanno alle volte a deporsi nei semi, che non dovrebbero verosimilmente contenere sostanze inutili o dannose per lo sviluppo del nuovo organismo. Le piante del resto non sono del tutto sprovviste di mezzi escretori e possiedono poi sopra tutto un mezzo assai efficace per eliminare i rifiuti organici: quello dell'ossidazione. A proposito del significato biologico degli alcaloidi, noi abbiamo espresso altra volta la supposizione che questi corpi, e forse tutte le sostanze accessorie, potrebbero esercitare le funzioni di ormoni vegetali.

A questo scopo abbiamo iniziato una serie di esperienze e nella presente Nota descriviamo quelle compiute nella scorsa estate.

Le piante sono in genere organismi poco reattivi e però si prestano male per studiare l'effetto di interventi chimici. Noi abbiamo in proposito una larga esperienza perchè da parecchi anni ci occupiamo del contegno delle sostanze organiche nei vegetali. Finora abbiamo sempre osservato che l'introduzione di tali corpi sia per mezzo delle radici, che per inoculazione nel fusto, se la natura e la quantità delle sostanze sono tali da lasciare le piante in vita, esse non manifestano esteriormente nessuna alterazione facilmente apprezzabile. Le esperienze da noi fatte finora si riferiscono peraltro a piante adulte, che evidentemente devono essere poco sensibili a simili interventi. Era invece da sperarsi che operando durante la germinazione dei semi, oppure fino dai primordi del loro sviluppo, e continuando il trattamento durante tutta la crescita delle pianticelle, si sarebbe potuto notare qualche modificazione anche nell'aspetto esteriore della specie esaminata.

Noi abbiamo fatto alcune esperienze coi fagioli e col mais ed abbiamo ottenuto massime coi primi, impiegando il nitrile mandelico (cianidrina dell'aldeide benzoica), la nicotina, la stricnina, la caffeina e la morfina qualche risultato che ci sembra degno di menzione.

Le esperienze dell'anno scorso <sup>(1)</sup> ci avevano insegnato che le piantine germoglianti sul cotone idrofilo o sulla carta da filtro si abituano più facil-

<sup>(1)</sup> Vedi la nostra II Nota *Sulla formazione dei glucosidi per mezzo delle piante*, in questi Rendiconti, serie 5<sup>a</sup>, vol. 25, I, pag. 8.



mente a sopportare sostanze venefiche di quelle adulte e però abbiamo voluto vedere come si comportassero il mais e massime i fagioli col *nitrile mandelico*, che costituisce il principio aromatico dell'amigdalina. Da alcuni saggi fatti or sono alcuni anni sapevamo che questa sostanza è estremamente venefica anche per lo stesso lauroceraso, se inoculata sotto la corteccia, e così pure per le piante adulte di mais e di fagioli.

Noi abbiamo studiato l'intero sviluppo delle piantine incominciando dalla germinazione dei semi. Il nitrile mandelico impedisce quasi completamente la germinazione dei semi di fagioli e di mais quando questi vengano inaffiati con una soluzione all'1 ‰ in germinatoi su cotone idrofilo. Esperienze eseguite parallelamente con una soluzione di *amigdalina* al 5,5 ‰ <sup>(1)</sup> dettero invece risultato positivo, perchè tutti i semi germinarono come quelli bagnati per confronto con acqua. Questi fatti hanno naturalmente la loro importanza in quanto che illustrano la ragione per cui i semi delle Prunoidee non contengono libero il nitrile mandelico, ma bensì in forma glucosidica.

Vista l'impossibilità di somministrare il nitrile mandelico fino dall'inizio della vita nel seme, abbiamo pensato di intervenire un po' più tardi, inaffiando con la soluzione all'1 ‰ i semi, alcuni giorni dopo l'avvenuta germinazione, abituando così le piantine a sopportare il veleno. Il risultato fu assai soddisfacente. Le piantine si mantennero in vita e, sebbene più lentamente di quelle coltivate per confronto, bagnate con la sola acqua oppure con la soluzione nutritizia ordinaria, si svilupparono fino a fioritura. Le pianticelle crebbero dunque alimentate col solo nitrile mandelico o con questo e la soluzione nutritizia, ma priva di composti azotati, il loro aspetto peraltro apparve sensibilmente mutato. Massime nei fagioli l'influenza del nitrile mandelico si manifestò in modo evidente: le pianticelle raggiunsero una minore altezza, ma in compenso apparvero più robuste, coi gambi più grossi e più pieni, con le foglie d'un verde assai carico e rotondeggianti, cioè meno allungate di quelle normali; le radici erano invece assai meno sviluppate. Con nostra grande meraviglia notammo infine che le pianticelle nutrite col nitrile resistettero all'avanzarsi della stagione invernale; alcuni esemplari di esse sono ancora in vita, mentre i campioni coltivati con la soluzione nutritizia completa ed anche con un eccesso di nitrati, sono disseccati fino dall'ottobre.

A differenza degli altri casi da noi studiati, con altre sostanze, non si riscontrarono nelle pianticelle cresciute fino a fioritura incipiente, preparando il consueto estratto, nè direttamente nè dopo l'aggiunta d'emulsina, nè l'acido cianidrico, nè l'aldeide benzoica. Si vede dunque che esse si sono nutrite a

(<sup>1</sup>) Corrispondente al tenore di 1 ‰ di nitrile mandelico.



spese dell'azoto dell'acido cianidrico del nitrile mandelico, e che l'aldeide benzoica venne ossidata o altrimenti trasformata.

Diremo infine che se si inaffiano le pianticelle normali, cresciute fino alla fioritura, e cioè non abituate al veleno, con la soluzione all'1 ‰ del nitrile mandelico, esse cadono, perchè il fusto si piega in prossimità della radice, e muoiono entro 24 ore, in conformità con quanto avevamo osservato altre volte con piante cresciute in vasi o in piena terra, come s'è detto più sopra.

Le piantine di fagioli nutrite col nitrile mandelico per lenta abitudine al veleno si modificano dunque in modo da apparire, per quanto ci è dato di dire per ora, così diverse dalla specie normale, come se rappresentassero una nuova varietà del *Phaseolus vulgaris*.

In seguito a questi risultati che presentano un certo interesse, abbiamo esaminato l'influenza di altre sostanze sia sulla germinazione che sull'ulteriore sviluppo delle piantine di mais e di fagioli, ed abbiamo sperimentato anzi tutto l'azione dell'acido cianidrico. Bagnando i semi con la soluzione all'1 ‰, si osserva un ritardo nella germinazione rispetto a quelli bagnati con l'acqua e non tutti ma solo circa il 30 % dei presenti, germinarono. Le piantine continuarono a crescere stentatamente per qualche tempo, ma finirono per seccarsi forse anche in seguito allo sviluppo di abbondanti muffe. L'acido cianidrico agisce dunque sui semi in modo abbastanza deleterio, ciò che prova un'altra volta l'utilità delle combinazioni glucosidiche; perchè è noto che il *Phaseolus lunatus*, ad esempio, contiene la cianidrina dell'acetone in forma di glucoside.

Riflettendo poi che i semi di alcune piante contengono *alcaloidi*, abbiamo creduto utile fare delle prove con la nicotina, la stricnina, la caffeina ed anche la morfina, impiegando in tutti questi casi la soluzione contenente l'1 ‰ dell'alcaloide in forma di tartarato ad eccezione della caffeina che venne adoperata allo stato libero.

La *nicotina* impedisce quasi completamente la germinazione dei fagioli perchè sopra 30 semi solo 4 svilupparono il germe; la crescita si arrestò anche per questi ai primi stadî. Abbiamo però, in vista dei risultati ottenuti col nitrile mandelico, cercato di abituare le piantine all'azione del veleno, somministrando la soluzione all'1 ‰ a germinazione già iniziata. Con questo artificio siamo realmente riusciti a mantenere per qualche tempo le piantine in vita, che si svilupparono con ritardo; anche esse assunsero un aspetto alquanto diverso dalle normali, coltivate colla soluzione nutritizia, per la forma ed il colore più carico delle foglie, che si mostrarono increspate ai bordi. Su di esse si svilupparono in seguito delle bollosità che ingrandendosi avrebbero condotto al disseccamento delle piante. Non disperiamo peraltro, modificando le condizioni di ambiente e con maggiori cure, di ottenere in seguito risultati più favorevoli. Prima che il disseccamento avvenisse com-



pletamente, abbiamo voluto accertare se le piantine contenevano l'alcaloide somministrato. Ne abbiamo fatto però l'estratto cloridrico e da questo abbiamo potuto ottenere col noto trattamento 1 gr. di cloroaurato di nicotina.

La *stricnina*, invece, non impedisce la germinazione dei semi di fagioli e di mais, nè la ritarda; anzi a volte ci parve avvenisse con qualche anticipo su quelli di controllo bagnati con l'acqua. Le piantine peraltro dopo alcuni giorni di vita normale dettero segni di sofferenza e si seccarono.

Si potrebbe dire che l'azione della stricnina è antitetica con quella del nitrile mandelico e della nicotina: queste ultime sostanze impediscono o ritardano molto la germinazione, ma ad esse le piante possono abituarsi modificando il loro aspetto esterno. In vista di questi fatti si è indotti a rilevare che, mentre nei semi di tabacco la nicotina è contenuta in quantità assai esigua — noi abbiamo trovato che da 1 chilogr. di semi si ottiene 0,2 gr. di cloridrato <sup>(1)</sup> — ed aumenta collo sviluppo della pianta, i semi della stricnina sono assai ricchi (1,5 %) di stricnina. Non ci sembra che queste osservazioni parlino in favore della supposizione, che gli alcaloidi non abbiano nessuna funzione organica nelle piante, e sieno da considerarsi esclusivamente come sostanze escrementizie.

La *caffaina* e la *morfina* hanno un'azione analoga alla stricnina, cioè non impediscono la germinazione dei semi delle due specie sperimentate, ma esercitano un'azione deleteria sulla crescita delle due piante. Tuttavia abbiamo notato, inaffiando con le soluzioni alcaloidiche le piantine già sviluppate, che la morfina è un po' meglio tollerata della caffeina.

Queste esperienze, che ci sembrano promettenti, devono naturalmente essere riprese e proseguite su più larga scala, estendendole ad altre sostanze oltre a quelle sperimentate finora, ciò che ci proponiamo di fare appena la stagione lo permetterà.

Infine porghiamo i nostri ringraziamenti alla signorina Angela Puricelli, che ci ha coadiuvato con intelligente assiduità in queste ricerche.

<sup>(1)</sup> Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna, serie VII, tomo I, pag. 345 (1913-14); Annales de Chimie, 9<sup>a</sup> serie, vol. III, pag. 19.

Fisica matematica. — *Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici* <sup>(1)</sup>. Nota I del Corrisp. O. TEDONE.

I. — INTRODUZIONE.

1. Prenderemo come punto di partenza la teoria elettromagnetica dei fenomeni luminosi. Quello che, però, diremo mirando ai fenomeni luminosi, potrà anche estendersi, facilmente, ad ogni campo elettromagnetico esistente nel mezzo cristallino, purchè questo mezzo si conservi uniassico anche per gli ultimi fenomeni. E ricordiamo che un mezzo cristallino perfettamente dielettrico al quale caso, nelle considerazioni che seguono, vogliamo limitarci, rispetto al complesso dei fenomeni elettromagnetici, è individuato dalla espressione dell'energia elettromagnetica elementare, allo stesso modo, p. es., con cui lo stesso mezzo cristallino è individuato dall'espressione del potenziale elastico elementare rispetto ai fenomeni elastici. Che, inoltre, si assume per espressione dell'energia elettromagnetica elementare la somma di una funzione omogenea di secondo grado delle componenti della forza elettrica (energia elettrica) e di una analoga funzione delle componenti della forza magnetica (energia magnetica). E che, infine, alla parte che rappresenta la energia magnetica, si suole assegnare la stessa forma isotropa che ad essa conviene nel vuoto, o nell'aria, ipotesi sicuramente accettabile, almeno, nel campo dei fenomeni luminosi.

Adottando queste ipotesi ed indicando con  $X, Y, Z$  le componenti della forza elettrica, con  $U, V, W$  quelle della forza magnetica, con  $f$  l'espres-

(<sup>1</sup>) Le prime ricerche d'indole generale nella teoria dei fenomeni luminosi in un mezzo cristallino, pare, siano dovute a Lamé (*Leçons sur la théorie math. de l'élast.*... Paris, 1852) il quale parte dall'ipotesi che le vibrazioni luminose non sieno che vibrazioni elastiche di uno speciale corpo solido e che quindi esse debbano farsi dipendere dalle stesse equazioni delle vibrazioni di un corpo solido elastico. Basandosi sulle equazioni dell'ottica ch'egli, per questa via, costruisce, fa uno studio diffuso sulla possibilità e sulla determinazione di un unico centro luminoso. I risultati ottenuti da Lamé, in questo indirizzo, sono stati utilizzati, poi, dalla Kowalevsky (*Acta math.*, vol. VI, pag. 249) nelle ricerche da lei fatte sulla integrazione col metodo di Weierstrass delle equazioni dell'ottica di Lamé già citate. Però i risultati ottenuti da Lamé e quelli ottenuti dalla Kowalevsky sono stati, poi, assoggettati a critica ed in gran parte contestati dal Volterra (*Acta math.*, vol. XVI, pag. 153) le di cui considerazioni e procedimenti sono stati approfonditi dal Signorini in un ottimo lavoro (*Ann. della S. N. S. di Pisa*, vol. XII), nel caso particolare dei mezzi uniassici che il Volterra aveva determinatamente lasciato da parte. In esso si troveranno altre utili citazioni relative all'argomento. Si consulti anche il § IX delle *Lectures* tenute dal Volterra alla Clark University (pubbl. nel 1912).



sione dell'energia elettromagnetica elementare per unità di volume, assumendo come assi coordinati un sistemn di assi di simmetria elettrica, potremo scrivere

$$(1) \quad f = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 Z^2 + U^2 + V^2 + W^2).$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sono le così dette costanti dielettriche principali e l'espressione (1) di  $f$  conviene a qualunque mezzo cristallino perfettamente dielettrico. Se le tre costanti  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sono eguali, il mezzo è isotropo, o come tale si comporta rispetto ai fenomeni elettromagnetici; se soltanto due di queste tre costanti sono eguali, i corrispondenti cristalli si dicono *uniassici*; in caso diverso *biassici*.

I fenomeni elettromagnetici, all'interno del cristallo, hanno le stesse simmetrie della funzione  $f$ ; quindi, in ogni caso, un centro di simmetria e tre assi di simmetria binarii rispettivamente ortogonali. D'altra parte, un calcolo molto semplice dimostra che se l'asse  $z$ , p. es., è, per  $f$ , un asse di simmetria almeno ternario esso è anche un asse d'isotropia e, quindi, comunque si scelgano gli altri due assi  $x$  e  $y$ ,  $f$  ha sempre la forma (1) con  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , e il mezzo cristallino è uniassico. Ricordiamo poi che le relazioni fra le simmetrie dei fenomeni elettromagnetici in un mezzo cristallino e le simmetrie della sua costituzione molecolare dipendono dalla nota legge di fisica cristallografica che « tutte le simmetrie di costituzione del mezzo cristallino devono rimanere tali per  $f$ , come, del resto, per ogni altro fenomeno fisico che possa riscontrarsi nell'interno del cristallo ». Ne viene subito che i sistemi cristallini in cui si riscontra un asse ternario, quaternario, o senario, sono al più uniassici e l'esperienza dimostra che tali sono effettivamente, a meno che non si tratti del sistema regolare nel qual caso il cristallo, rispetto ai fenomeni elettromagnetici, si comporta come isotropo.

2. La spinta alle presenti ricerche m'è venuta dalla constatazione del fatto che, combinando, in modo opportuno, i metodi d'integrazione da me adoperati in precedenti Note <sup>(1)</sup>, si riesce ad integrare in modo completo anche le equazioni dell'ottica relative ai mezzi uniassici portando, quindi, così, la teoria generale dei fenomeni luminosi, per questi mezzi, allo stesso livello che l'indicata teoria ha raggiunto per i mezzi isotropi. Effettivamente, poi, le accennate equazioni s'integrano egualmente, basandosi sugli stessi metodi contenuti nelle citate Note, anche nel caso in cui l'energia magnetica non sia una funzione isotropa, purchè l'energia elettromagnetica elementare

<sup>(1)</sup> *Campi elettrom. dipendenti da una sola coordinata. Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell*, in Rend. della R. Acc. dei Lincei, sedute 19 dicembre 1915 e 16 aprile 1916. Colgo qui l'occasione, riparando ad una involontaria omissione, per aggiungere ai lavori citati nelle ultime Note: A. Tonolo, *Sull'integr. delle equaz. fondamentali dell'elettrodin.* Ann. di mat., tomo XVII.

totale continui ad avere un asse di isotropia. Le equazioni stesse s'integrerebbero anche se nel mezzo cristallino si debba tener conto, in certa misura, dei fenomeni di conduzione purchè l'asse d'isotropia della energia elettromagnetica elementare continui ad esser tale per gli ultimi fenomeni. Per non andare incontro a formole complicate, ci limiteremo, però, solo al caso in cui il mezzo è perfettamente dielettrico e la corrispondente energia elettromagnetica abbia la forma (1), ma supporremo che, nel mezzo, possano aver luogo correnti di convezione.

## II. — SISTEMA DI EQUAZIONI AGGIUNTO E TEOREMA DI RECIPROCIÀ.

3. Le equazioni che vogliamo assoggettare ai nostri studi si possono scrivere

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} = c \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - 4\pi u, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} = c \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) - 4\pi v, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right), \text{ con } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} = c \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) - 4\pi w, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right). \end{array} \right.$$

nelle quali la costante  $c$  è, al solito, la velocità della luce nel vuoto ed  $u, v, w$  sono funzioni note di  $x, y, z, t$ . Poichè, poi, le cose che diremo in questa parte del nostro lavoro sono indipendenti dall'ipotesi particolare di  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , noi le esporremo come se la detta ipotesi non sussista.

Qualunque sieno  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , al sistema di equazioni

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = c \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = c \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = c \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right), \end{array} \right.$$

daremo il nome di sistema *aggiunto* del sistema (2). Se ora  $X, Y, \dots, W$  soddisfano al sistema (2) e  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_3$  al sistema (3), si trova subito che vale l'identità

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_1 X \psi_1 + \varepsilon_2 Y \psi_2 + \varepsilon_3 Z \psi_3 - (U \varphi_1 + V \varphi_2 + W \varphi_3)] = \\ & = c \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (V \psi_3 - W \psi_2 + Y \varphi_3 - Z \varphi_2) + \dots \right\} - 4\pi (u \psi_1 + v \psi_2 + w \psi_3) \end{aligned}$$



in cui i puntini, nella parentesi a secondo membro, indicano la somma di due termini che si deducono da quello scritto, nella stessa parentesi, con permutazioni circolari. Introducendo, quindi, come al solito, nelle nostre considerazioni lo spazio lineare a quattro dimensioni in cui  $x, y, z, t$  sono le coordinate di un punto, e dinotando con  $\sigma_3$  una varietà regolare, chiusa, a tre dimensioni di questo spazio, limitante una regione  $S_4$  all'interno della quale  $X, Y, \dots, W; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_3$  ed  $u, v, w$  sono funzioni regolari, potremo scrivere la formola

$$(4) \quad \int_{\sigma_3} [X \Phi_1 + Y \Phi_2 + Z \Phi_3 - (U \Phi_1 + V \Phi_2 + W \Phi_3)] d\sigma_3 - \\ - 4\pi \int_{S_4} (u\psi_1 + v\psi_2 + w\psi_3) dS_4 = 0$$

in cui

$$(5) \quad \begin{cases} \Phi_1 = \varphi_1 \cos nt + c(\psi_2 \cos nz - \psi_3 \cos ny), \\ \Psi_1 = \epsilon_1 \psi_1 \cos nt - c(\varphi_2 \cos nz - \varphi_3 \cos ny), \end{cases}$$

$n$  essendo la normale a  $\sigma_3$  diretta verso l'interno di  $S_4$ , mentre  $\Phi_2, \Phi_3$  e  $\Psi_2, \Psi_3$  si deducono, rispettivamente, da  $\Phi_1$  e  $\Psi_1$  con permutazioni circolari di  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3; x, y, z; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  e  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ . Alla formola (4) daremo il nome di *teorema di reciprocità* relativo ai due sistemi di equazioni (2) e (3) e continueremo a dare alle espressioni  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Psi_3$  il nome di *funzioni associate* a  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_3$ .

### III. — DETERMINAZIONE DI W E DI Z.

4. Sia adesso  $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$  e chiamiamo, in questa parte del nostro lavoro, con  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  le coordinate correnti di un punto del nostro spazio a quattro dimensioni; con  $x, y, z, t$ , invece, le coordinate di un punto fisso dello stesso spazio. Nella ipotesi fatta, W e Z, ossia le componenti della forza magnetica e della forza elettrica secondo l'asse d'isotropia, si determinano ancora con procedimento perfettamente analogo a quello con cui abbiamo determinato tutte e sei le componenti dei due detti vettori nel caso dell'isotropia completa. Per mettere in luce questo fatto e costruire, contemporaneamente, le formole che ci daranno le due quantità W e Z, cominciamo con l'osservare che si soddisfa alle equazioni (3) ponendo

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_1 = -c \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2 \partial \xi} , & \varphi_2 = -c \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta \partial \xi} , & \varphi_3 = c \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \right) , \\ \psi_1 = - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tau \partial \eta} , & \psi_2 = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tau \partial \xi} , & \psi_3 = 0 \end{cases}$$

$\Omega$  essendo una soluzione dell'equazione

$$(7) \quad C^2 \Delta^2 \Omega - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tau^2} = 0 \quad , \quad C^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1}.$$

Introduciamo la varietà conica  $\Gamma$ , caratteristica rispetto alle nostre equazioni, col vertice nel punto  $(x, y, z, t)$  e di equazione

$$C^2(t - \tau)^2 = r^2 = 0 \quad , \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} ;$$

fissiamo, quindi, nello spazio  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ , una varietà regolare a tre dimensioni, la quale sia incontrata in un punto solo da ogni parallela all'asse  $\tau$  che l'incontra, potendo, però, questa retta, come caso limite, in tutto, o in parte, appartenere alla varietà stessa, e supponiamo che il punto  $(x, y, z, t)$  sia in tale posizione, rispetto alla varietà precedente, che nella regione  $S_4$  limitata da  $\Gamma$  e dalla porzione  $\sigma_3$  della stessa varietà a tre dimensioni sia

$$t > \tau \quad , \quad t - \tau > r.$$

Assumendo, allora, per  $\Omega$ , l'espressione

$$(7') \quad \Omega = \frac{r}{C^2} \left[ \frac{C(t - \tau)}{r} - 1 \right]^2$$

ed applicando, poi, il teorema di reciprocità alla soluzione generica  $X, Y, \dots, W$  delle (2) ed alla soluzione (6) delle (3) costruita con l'espressione (7') di  $\Omega$ , nella regione limitata da  $\Gamma$ , da  $\sigma_3$  e dalla varietà  $\gamma$  di equazione  $r = d$ ,  $d$  essendo una costante, basterà andare al limite, per  $d = 0$ , per dedurre dal teorema di reciprocità, nel modo ricordato, la prima delle formole richieste:

$$(8) \quad W(x, y, z, t) = \left[ W - \frac{2}{3} c \frac{X \cos n\eta - Y \cos n\xi}{\cos n\tau} \right]_0 - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( F_2 - \frac{1}{c} \int_{S_4} \frac{v}{r} dS_4 \right) + \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( F_1 - \frac{1}{c} \int_{S_4} \frac{u}{r} dS_4 \right) + \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \right\}.$$

In questa formola è

$$(8') \quad \begin{cases} F_1 = \frac{1}{4\pi c} \int_{\sigma_3} [\varepsilon_1 X \cos n\tau + c(V \cos n\xi - W \cos n\eta)] \frac{d\sigma_3}{r}, \\ F_2 = \frac{1}{4\pi c} \int_{\sigma_3} [\varepsilon_1 Y \cos n\tau + c(W \cos n\xi - U \cos n\zeta)] \frac{d\sigma_3}{r}; \\ G_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} [U \cos n\tau - c(Y \cos n\xi - Z \cos n\eta)] \frac{d\sigma_3}{r}, \end{cases}$$



mentre  $G_2$  e  $G_3$  si deducono da  $G_1$  con semplici permutazioni circolari; inoltre,  $t_0$  è il valore di  $\tau$  nel punto d'incontro della retta  $r=0$  con  $\varepsilon_3$  e le quantità con l'indice zero indicano i valori di queste stesse quantità nel detto punto.

5. Per determinare  $Z$  le considerazioni che servono a determinare  $W$  hanno bisogno di essere soltanto leggermente modificate. La formola (8) che da  $W$  coincide perfettamente con la corrispondente del caso dell'isotropia completa salvo a sostituire  $\varepsilon_1$  al posto dell'unica costante dielettrica  $\varepsilon$ ; la formola, invece, che andiamo a costruire per  $Z$  differirà dalla corrispondente del caso citato in modo più rilevante. Per costruire la formola indicata si osservi, dapprima, che si soddisfa ancora alle equazioni (3) ponendo

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \eta} \quad , \quad \varphi_2 = - \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \xi} \quad , \quad \varphi_3 = 0, \\ \psi_1 = - \frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \xi \partial \zeta} \quad , \quad \psi_2 = - \frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \eta \partial \zeta} \quad , \quad \psi_3 = \frac{c}{\varepsilon_3} \left( \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \eta^2} \right) \end{array} \right.$$

purchè  $\bar{\Omega}$  sia adesso soluzione dell'equazione

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau^2} = c^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_3} \left( \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \zeta^2} \right\}.$$

E prenderemo, per  $\bar{\Omega}$ , la funzione

$$(10') \quad \bar{\Omega} = \frac{\bar{r}}{c^2} \left[ \frac{c(t-\tau)}{\bar{r}} - 1 \right]^2, \quad \bar{r} = \sqrt{\varepsilon_3(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \varepsilon_1(z-\zeta)^2.$$

Al posto della varietà  $\Gamma$  del caso precedente, si considererà ora la varietà  $\bar{\Gamma}$  di equazione

$$(11) \quad c^2(t-\tau)^2 = \bar{r}^2$$

la quale è ancora una varietà conica col vertice nel punto  $(x, y, z, t)$ , caratteristica per le nostre equazioni; ed al posto della varietà  $\gamma$  si considererà, analogamente, la varietà cilindrica  $\bar{\gamma}$  di equazione

$$(12) \quad \bar{r} = d$$

$d$  essendo sempre una costante che, poi, faremo tendere a zero. Si osservi, quindi, che, scegliendo opportunamente il senso della normale sulle due falde di  $\bar{\Gamma}$ , è

$$\cos n\tau = - \frac{c}{K}, \quad \cos n\xi = - \frac{1}{K} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}, \quad \cos n\eta = - \frac{1}{K} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}, \quad \cos n\zeta = - \frac{1}{K} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}$$

con

$$K^2 = c^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}\right)^2$$

per cui i valori delle funzioni associate alle funzioni (9) costruite col valore (10') di  $\bar{\Omega}$ , sulla varietà  $\bar{F}$ , saranno dati dalle formole

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{K}{c} \Phi_1 = \left\{ \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) + 2 \frac{c}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right\} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}, \\ \frac{K}{c} \Phi_2 = - \left\{ \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) + 2 \frac{c}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right\} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}, \\ \Phi_3 = 0, \\ \frac{K}{c} \Psi_1 = \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}, \\ \frac{K}{c} \Psi_2 = \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}, \\ \frac{K}{c} \Psi_3 = - \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right)^2 \right] - 2 \frac{c \varepsilon_3}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}}. \end{cases}$$

E, poichè, come si verifica, immediatamente, l'operazione  $c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau}$  è una operazione di derivata in una direzione normale ad  $n$  e, quindi, appartenente a  $\bar{F}$ , le funzioni  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Psi_3$  si annullano tutte su  $\bar{F}$ .

Notiamo pure che, scegliendo il senso positivo della normale a  $\bar{\gamma}$  in modo che penetri nella regione in cui  $\bar{r}$  cresce e s'intenda che sia

$$k = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}\right)^2},$$

su  $\bar{\gamma}$ , è

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{k}{c} \Phi_1 = - \frac{c}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}, \quad \frac{k}{c} \Phi_2 = \frac{c}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}, \quad \Phi_3 = 0 \\ \frac{k}{c} \Psi_1 = \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}, \quad \frac{k}{c} \Psi_2 = \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}, \\ \frac{k}{c} \Psi_3 = - \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \bar{r}} \left[ \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right)^2 \right] \end{cases}$$

nelle quali formole è da porsi  $\bar{r} = d$ .

Ciò posto, chiamiamo  $\bar{\sigma}_3$  la porzione della varietà a tre dimensioni a cui appartiene  $\sigma_3$ , compresa in  $\bar{F}$ , ed  $\bar{S}_4$  la regione dello spazio a quattro



dimensioni solito limitata da  $\bar{\sigma}_3$  e da  $\bar{F}$ ; e indichiamo con  $\bar{\sigma}'_3$  ed  $\bar{S}'_4$  le porzioni di  $\bar{\sigma}_3$  ed  $\bar{S}_4$  esterne a  $\bar{\gamma}$ . Applichiamo, quindi, il teorema di reciprocità (4), nella regione  $\bar{S}'_4$ , alla stessa soluzione generica di prima (X, Y, ..., W) delle equazioni (2) ed alla soluzione (9) delle equazioni (3) costruita con la funzione  $\bar{\Omega}$  data dalla (10'). Tenendo conto, allora, che l'elemento  $d\bar{\gamma}$  della varietà  $\bar{\gamma}$  è dato dalla formola

$$d\bar{\gamma} = \frac{d^2}{\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1}} k d\omega d\tau$$

in cui  $d\omega$  dinota l'elemento della superficie sferica ordinaria di raggio uno, e che

$$\int_{\omega} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \right)^2 d\omega = \frac{4\pi}{3} \varepsilon_3, \dots, \int_{\omega} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} d\omega = 0, \dots,$$

basta andare al limite, per  $d = 0$ , per trovare subito la formola

$$\begin{aligned} \frac{8\pi c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \int_{t_0}^t (t - \tau) Z(x, y, z, \tau) d\tau = \\ = \frac{4\pi c}{3\sqrt{\varepsilon_1}} \left[ (t - t_0)^2 Z_0 - \frac{4\pi}{\varepsilon_3} \int_{t_0}^t (t - \tau)^2 w(x, y, z, \tau) d\tau \right] + \\ + \lim_{d=0} \left\{ \int_{\bar{\sigma}_3} [X\psi_1 + Y\psi_2 + Z\psi_3 - (U\phi_1 + V\phi_2 + W\phi_3)] d\bar{\sigma}_3 - \right. \\ \left. - 4\pi \int_{\bar{S}'_4} (u\psi_1 + v\psi_2 + w\psi_3) d\bar{S}_4 \right\} \end{aligned}$$

in cui, naturalmente, le  $\phi_1, \phi_2, \dots, \psi_3$  sono le funzioni associate della soluzione particolare adoperata.

Da questa formola si eliminano gli integrali impropri, portando dei segni di derivazione fuori dei segni integrali, col metodo indicato nella seconda delle Note citate, e si trova, derivando, ancora, due volte rispetto a  $t$  e dividendo poi per  $8\pi$ ,

$$\begin{aligned} (15) \quad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} Z(x, y, z, t) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left[ Z_0 - \frac{4\pi}{\varepsilon_3} \int_{t_0}^t w(x, y, z, \tau) d\tau \right] + \\ + \frac{2c^2}{3\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1}} \left( \frac{U \cos n\eta - V \cos n\xi}{\cos n\tau} \right)_0 \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \bar{G}_2}{\partial t} - c \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{F}_1 - \int_{\bar{S}_4} \frac{u}{r} d\bar{S}_4 \right) - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{F}_3 - \int_{\bar{S}_4} \frac{w}{r} d\bar{S}_4 \right) \right] \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \bar{G}_1}{\partial t} - c \left[ \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{F}_3 - \int_{\bar{S}_4} \frac{w}{r} d\bar{S}_4 \right) - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{F}_2 - \int_{\bar{S}_4} \frac{v}{r} d\bar{S}_4 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

in cui

$$(15') \quad \begin{cases} \bar{F}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} [\varepsilon_1 X \cos n\tau + c(V \cos n\xi - W \cos n\eta)] \frac{d\sigma_3}{r}, \dots \\ \bar{G}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} [U \cos n\tau - c(Y \cos n\xi - Z \cos n\eta)] \frac{d\sigma_3}{r}, \dots \end{cases}$$

IV. — DETERMINAZIONE DELLE ALTRE DUE COPPIE DI QUANTITÀ  
X, V E Y, U.

6. Determinate W e Z, possiamo determinare la coppia di funzioni X, V dalle due equazioni

$$(16) \quad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial z} = c \frac{\partial W}{\partial y} - 4\pi u, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + c \frac{\partial X}{\partial z} = c \frac{\partial Z}{\partial x}$$

e la coppia di funzioni Y, U dalle altre due

$$(16') \quad \varepsilon_1 \frac{\partial Y}{\partial t} - c \frac{\partial U}{\partial z} = -c \frac{\partial W}{\partial x} - 4\pi v, \quad \frac{\partial U}{\partial t} - c \frac{\partial Y}{\partial z} = -c \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

I due sistemi di equazioni (16) e (16'), astrazion fatta dal nome delle incognite e dai diversi valori dei termini noti, non sono sostanzialmente differenti e possiamo trattarli contemporaneamente introducendo un doppio segno.

Prenderemo, dunque, a studiare il sistema di equazioni

$$(17) \quad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} \pm c \frac{\partial V}{\partial z} = M, \quad \frac{\partial V}{\partial t} \pm c \frac{\partial X}{\partial z} = N$$

in cui indichiamo con M e N i termini noti, il quale, del resto, salvo l'introduzione dei termini noti ai secondi membri, non è che un caso particolare di quello studiato nella prima delle Note citate. Per ottenerne la integrazione, cominciamo col notare che, *a* e *b* essendo due costanti qualunque,

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_1 Xa + Vb) \pm c \frac{\partial}{\partial z} (Xb + Va) = Ma + Nb.$$

Consideriamo, quindi, nelle nostre equazioni, *x* e *y* come due parametri costanti e pensiamo, invece, *t* e *z* come le coordinate di un punto in un piano. Se supponiamo di aver scelti gli assi coordinati *z* e *t* in modo che l'asse *z* vada a coincidere con l'asse *t* dopo una rotazione positiva di  $\frac{\pi}{2}$ ; chiamiamo *s* un contorno chiuso, ordinariamente regolare, di questo piano, e  $\sigma$  l'area racchiusa dal contorno *s*, all'interno della quale le funzioni che compaiono nella (18) siano regolari; otteniamo subito, dalla (18),

$$(19) \quad \int_s \{(\varepsilon_1 Xa + Vb) dz \mp c(Xb + Va) dt\} + \int_\sigma (Ma + Nb) d\sigma = 0$$

in cui il contorno *s* si deve intendere percorso nel solito modo.



7. Per opportunità di notazioni, converrà indicare, ora, con  $\tau$  e  $\zeta$  le coordinate di un punto corrente del nostro piano, e serbare i simboli  $t$  e  $z$  per indicare le coordinate di un determinato punto fisso del piano stesso. E, nel caso che sia necessario, o conveniente, ricordare, contemporaneamente, le coordinate  $\tau$  e  $\zeta$  che compaiono come variabili d'integrazione nelle espressioni di  $W$  e di  $Z$ , avanti costruite, si potranno introdurre, per queste ultime variabili, dei nuovi simboli. Ciò posto, chiamiamo, adesso,  $\sigma$  la regione del piano  $\tau\zeta$  limitata dalle due rette

$$C(t - \tau) - (z - \zeta) = 0 \quad , \quad C(t - \tau) + (z - \zeta) = 0$$

essendo sempre  $C = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ , uscenti dal punto  $(t, z)$ , e da una linea  $s$  aperta e ordinariamente regolare. Ci limiteremo a considerare il solo caso in cui  $\sigma$  sia attraversata dalla retta  $\zeta = z$  e supporremo che  $s$  sia, al solito, incontrata in un punto solo da ogni retta  $z = \text{cost}$  che l'incontri a meno che una parte di  $s$  stessa non appartenga a questa retta. Chiamiamo  $\sigma_1$  quella delle due parti in cui  $\sigma$  è divisa dalla retta  $\zeta = z$  che è adiacente alla retta  $C(t - \tau) - (z - \zeta) = 0$ ,  $\sigma_2$  l'altra parte; ed indichiamo, inoltre, con  $P, Q, R$  i punti d'incontro di  $s$  con le rette  $C(t - \tau) - (z - \zeta) = 0$ ,  $\zeta = z$ ,  $C(t - \tau) + (z - \zeta) = 0$ , successivamente. A questo punto applichiamo la (19) ad una soluzione generica e regolare delle (17), una volta nella regione  $\sigma_1$  dopo aver fatto  $a = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ ,  $b = 1$ , il doppio segno, per  $a$ , corrispondendoci al doppio segno nelle (17); un'altra volta in  $\sigma_2$  dopo aver fatto  $a = \mp \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ ,  $b = 1$ . Troviamo così le due formole

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_P^Q (\pm \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\zeta - C d\tau) - C \int_T^t (\pm \sqrt{\varepsilon_1} X + V) d\tau + \\ \quad + \int_{\sigma_1} (\pm M + N \sqrt{\varepsilon_1}) \frac{d\sigma}{\sqrt{\varepsilon_1}} = 0, \\ \int_Q^R (\mp \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\zeta + C d\tau) - C \int_T^t (\mp \sqrt{\varepsilon_1} X + V) d\tau + \\ \quad + \int_{\sigma_2} (\mp M + N \sqrt{\varepsilon_1}) \frac{d\sigma}{\sqrt{\varepsilon_1}} = 0, \end{array} \right.$$

in cui  $T$  è il valore di  $\tau$  corrispondente al punto  $Q$  e che, ordinariamente,

è una funzione di  $x$  e  $y$ . Sommando e sottraendo le (20) e, quindi, derivando rispetto a  $t$  ricaviamo le altre formole

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \pm 2cX(z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_P^Q (\pm \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\xi - C d\tau) - \right. \\ &\quad \left. - \int_Q^R (\mp \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\xi + C d\tau) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\sigma_I} (\pm M + N \sqrt{\varepsilon_1}) d\sigma - \int_{\sigma_{II}} (\mp M + N \sqrt{\varepsilon_1}) d\sigma \right\}, \\ 2cV(z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_P^Q (\pm \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\xi - C d\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \int_Q^R (\mp \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\xi + C d\tau) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\sigma_I} (\pm M + N \sqrt{\varepsilon_1}) d\sigma + \int_{\sigma_{II}} (\mp M + N \sqrt{\varepsilon_1}) d\sigma \right\} \end{aligned} \right.$$

nelle quali abbiamo trascurato di scrivere i due parametri  $x$  e  $y$  da cui  $X$  e  $V$  pure dipendono.

Con l'aiuto delle (21) si scrivono immediatamente le espressioni definitive delle altre quattro incognite della nostra quistione e cioè di  $X$ ,  $V$  e di  $Y$ ,  $U$ . Noi non vogliamo indugiare in questa trascrizione e ci proponiamo di farlo solo nel caso in cui il problema generale di Cauchy, risoluto colle formole precedenti, si riduce al caso più semplice del problema della Kowalevsky nel quale, per  $t=0$ , sono dati i valori delle incognite del nostro problema in funzione di  $x, y, z$ .



**Fisiologia.** — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* IX: *Azione dei gas della respirazione sui muscoli lisci* (parte 3<sup>a</sup>) <sup>(1)</sup>. Nota del Corrisp. **FILIPPO BOTTAZZI**.

4. *Influenza del cambiamento del liquido di Ringer sul tono del preparato intestinale.* — Due fatti, già accennati in una mia precedente pubblicazione <sup>(2)</sup>, e sui quali vale la pena di tornare un po' più diffusamente, perchè probabilmente hanno qualche relazione con gli effetti prodotti dalla sottrazione dell'ossigeno o dalla somministrazione di acido carbonico, sono quelli che riguardano il modo di comportarsi dei preparati intestinali, quando si cambia il liquido di Ringer in cui essi hanno per un tempo più o meno lungo funzionato, e quando al liquido di Ringer si aggiungono acidi o basi, sempre in quantità relativamente piccola.

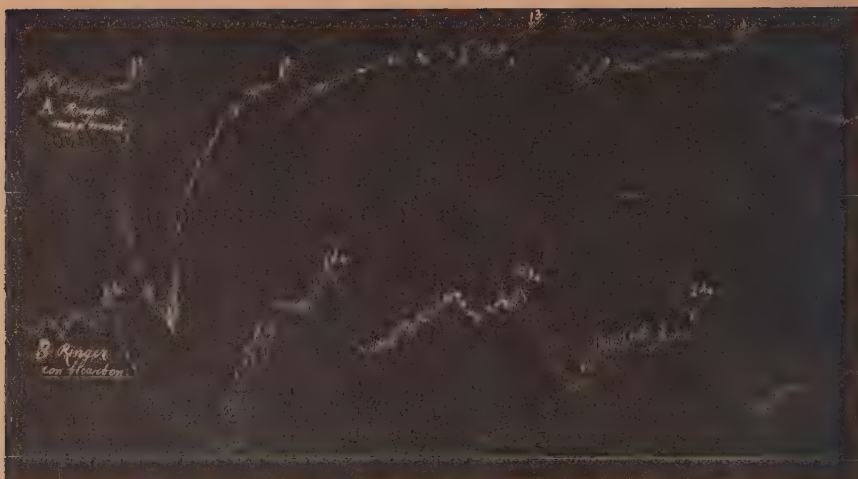
Il cambiamento del liquido di Ringer ossigenato con altro egualmente ossigenato e riscaldato alla stessa temperatura ha sempre per effetto una più o meno grande, ma sempre cospicua depressione del tono, che talora è accompagnata da diminuzione in altezza, e qualche volta anche da arresto delle contrazioni ritmiche automatiche. La depressione del tono dura generalmente pochi minuti; quindi il preparato torna gradatamente ad accorciarsi. Se si cambia di nuovo il liquido, dopo che il tono ha raggiunto il suo valore primitivo, si osserva un nuovo abbassamento del tono, e così per più volte consecutive, come dimostra il tracciato *B* della fig. 1.

Io credetti di spiegare in parte il fenomeno, ammettendo che il gorgogliamento prolungato dell'ossigeno per il liquido di Ringer spostasse l'acido carbonico dal bicarbonato sodico, rendendo il liquido più alcalino, e che il liquido nuovo agisse come una soluzione meno alcalina, o più acida del liquido vecchio. Infatti, come appresso vedremo, gli acidi abbassano, e gli alcali elevano il tono del preparato intestinale.

Per vedere se questa ipotesi abbia un solido fondamento, ho fatto ricerche comparative su due pezzi contigui di intestino tenue, immergendo l'uno in liquido di Ringer normale, cioè contenente carbonato sodico, e l'altro in liquido di Ringer privo di bicarbonato, e cambiando più volte di seguito questi liquidi. I tracciati *A* e *B* della fig. 1 dimostrano, che l'abbassamento del tono causato dal cambiamento del liquido avviene sia nell'uno come nell'altro liquido di Ringer, ossia che la presenza del bicarbonato, e quindi la

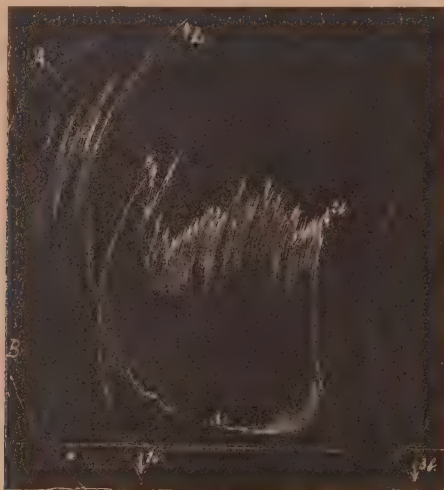
<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.

<sup>(2)</sup> Filippo Bottazzi, *Nuove ricerche ecc.* (II Memoria). Mem. d. R. Accad. d. Lincei, serie 5<sup>a</sup>, XI, fasc. II, pag. 45 segg., 1915.



(Riduzione a un terzo).

FIG. 1. — Due pezzi dello stesso intestino tenue, uno (A) in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer senza bicarbonato, l'altro (B) in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer normale (cioè contenente bicarbonato). Temper.: 36,5° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. In 1., 2., 3. e 4., si cambia il liquido di Ringer con altro egualmente privo di bicarbonato e riscaldato alla stessa temperatura. In 1a., 2a., 3a. e 4a. si cambia il liquido di Ringer normale con altro pure normale e riscaldato (9 dicembre 1916).



(Riduz. a un terzo).

FIG. 2. — Due preparati contigui d'intestino tenue di cane, immersi: A. in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer normale, cioè contenente bicarbonato sodico; B. in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Ossigeno. Temper.: 36° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. In \* il preparato B si era allungato tanto, che fu necessario risollevare la leva scrivente. In 1a. si sostituisce al liquido in cui era immerso il preparato A. un volume eguale di liquido di Ringer senza bicarbonato; e in 1b. si sostituisce al liquido in cui era immerso il preparato B. un volume eguale di liquido di Ringer con bicarbonato: il tono di A. si abbassa enormemente, e quello di B. si eleva. In 2b. si aggiunge al liquido in cui era immerso il preparato B (liquido di Ringer senza bicarbonato) 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 n di acido solforico; in 3b., 3 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 n di soda caustica. (7 dicembre 1916).



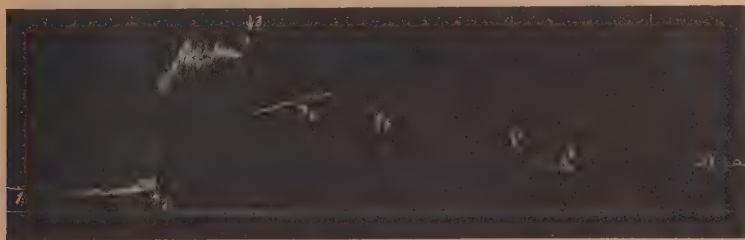
variazione dell'alcalinità dovuta allo spostamento dell'acido carbonico, è non la causa principale del fenomeno. Nell'esperimento, al quale si riferiscono i



(Riduz. a un terzo)

FIG. 3. — Intestino tenue di cagna, in 55 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer. Temp.: 37° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. Da 1. a 2. il preparato è immerso in liquido di Ringer normale, cioè contenente bicarbonato sodico; in 2. si sostituisce a questo un egual volume (55 cm<sup>3</sup>) di liquido di Ringer privo di bicarbonato; in 3. si sostituisce a questo, 55 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer normale, in cui poi il preparato rimane immerso per tutto il resto dell'esperimento. Da 1. a 4. per il liquido gorgoglia ossigeno. In 4. si sostituisce all'ossigeno l'acido carbonico; in 5. si fa passare di nuovo ossigeno. In 6. si aggiunge al liquido 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,05 n di HCl; in 7., 2 cm<sup>3</sup> della stessa soluzione. (21 novembre, 1916). "

tracciati della fig. 1, gli abbassamenti del tono del preparato immerso in



(Riduz. a un terzo).

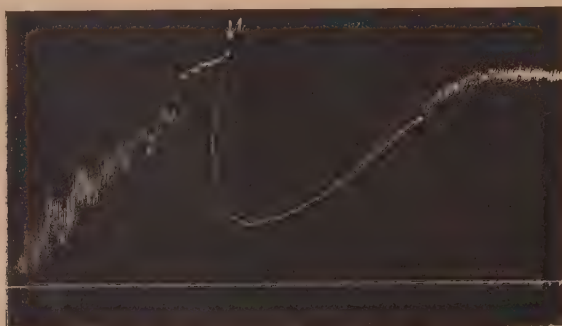
FIG. 4. — Intestino tenue di cagna, in 55 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer. Temper.: 37° C. Peso: gr. 10. tempo: 1'. Da 1. a 2. il preparato è immerso in liquido di Ringer senza bicarbonato sodico; in 2. si sostituisce a questo, un volume eguale di liquido di Ringer contenente bicarbonato sodico; in 3. di nuovo s'immerge il preparato in liquido di Ringer privo di bicarbonato, nel quale poi rimane per tutto il resto dell'esperimento. Da 1. a 4. per il liquido gorgoglia ossigeno; da 4. a 5., acido carbonico; da 5. in poi, ossigeno. In 6. si aggiunge al liquido 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,05 n di HCl; in 7., ancora 1 cm<sup>3</sup> della stessa soluzione. (21 novembre 1916).

liquido di Ringer privo di bicarbonato furono, anzi, più cospicui di quelli dell'altro preparato.

Da ciò non si deve dedurre, per altro, che la presenza del bicarbonato sodico, sia indifferente. Le figg. 2, 3 e 4 dimostrano, infatti, che i preparati

immersi in liquido di Ringer normale, cioè contenente bicarbonato, presentano sempre un tono più alto e talora contrazioni ritmiche più cospicue; e che, quando al liquido di Ringer normale si sostituisce liquido privo di bicarbonato, il tono si abbassa subito fortemente, mentre quando si sostituisce al liquido di Ringer privo di bicarbonato liquido normale, il tono subito si eleva. L'abbassamento del tono, nel primo caso, potrebbe anche esser dovuto, almeno in parte, al semplice cambiamento del liquido; ma nel secondo caso si ha invece elevazione del tono, che evidentemente è dovuto all'azione del bicarbonato. Una certa alcalinità del liquido è, dunque, necessaria perchè il preparato intestinale presenti un tono cospicuo.

A che cosa sia dovuto l'abbassamento del tono prodotto dal semplice cambiamento del liquido in cui è immerso il preparato, non è agevole dire. Esclusa,



(Kiduz, a metà).

Fig. 5. — Intestino tenue di cagna, in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Temper.: 37° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. In 1. si aggiunge al liquido di Ringer cm<sup>3</sup> 0,5 di soluzione 0,05 % di HCl. (19 novembre 1916).

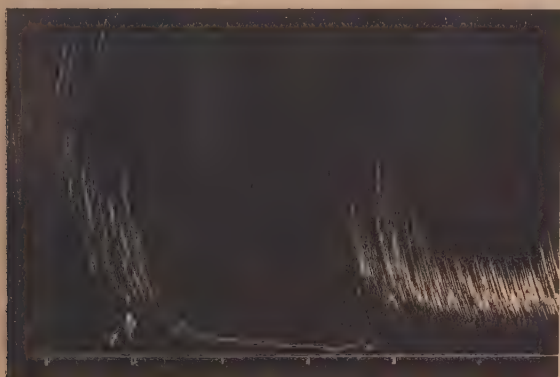
almeno in massima parte, l'influenza dell'ossigeno, che nei miei esperimenti gorgogliava incessantemente e sempre nella stessa quantità, e dell'acido carbonico; e tenendo conto dei risultati riferiti nella parte 2<sup>a</sup> di questa Nota; si potrebbe essere indotti a credere, che l'abbassamento del tono fosse dovuto a sottrazione di sostanze contratturanti contenute nel preparato, sostanze che verrebbero allontanate cambiando il liquido. Ma i tracciati della fig. 1 dimostrano, che l'abbassamento si ripete quattro volte di seguito e quasi allo stesso grado. Ora, se le sostanze attive fossero quelle stesse che, come abbiamo veduto, sono contenute nel siero del sangue; poichè il preparato fu tolto dall'animale dissanguato per decapitazione, e in esso non potevano essere rimaste che tracce di sangue, le quali avrebbero dovuto essere asportate completamente già al primo o al secondo cambiamento del liquido, la ripetizione dell'effetto al terzo, al quarto cambiamento (e forse anche in cambiamenti successivi, se fossero stati eseguiti) non si sarebbe dovuta osservare. Vien



fatto, quindi, di supporre che si tratti di sostanze elaborate dallo stesso intestino sopravvivate, sostanze che, allontanate a ogni cambiamento del liquido di Ringer, a mano a mano si rigenerano, determinando il nuovo progressivo ritorno del tono del preparato intestinale al suo valore primitivo. Per questa formazione *in situ* di sostanze capaci di tenere alto il tono muscolare la presenza del bicarbonato sodico non sarebbe necessaria, bensì, forse, la presenza di ossigeno. È questa una ipotesi che per ora mi limito ad enunciare, e che mi propongo di sottoporre subito a verifica sperimentale.

\* \* \*

5. *Influenza degli acidi e degli alcali sul preparato intestinale.* — Per quanto riguarda l'azione degli acidi e degli alcali, dai miei esperimenti



(Riduz. a metà).

Fig. 6. — Intestino tenue di cane, in 70 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer ossigenato. Temperatura: 36° C. Peso: gr. 6. Tempo: 5'. In 1. si aggiunge al liquido di Ringer 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,1 *n* HCl.

risulta che i primi abbassano sempre, mentre i secondi elevano il tono del preparato intestinale.

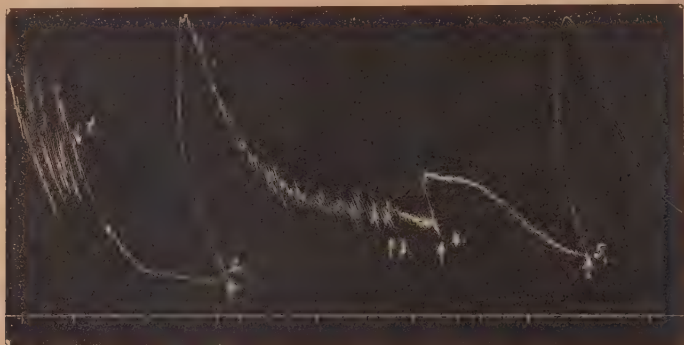
Già nel tracciato *B* della fig. 2 si vede l'effetto dell'aggiunta al liquido di Ringer di una piccola quantità di soluzione 0,2 *n* di acido solforico (in 2 *b*), e di una quantità un po' maggiore di soluzione 0,2 *n* di NaOH (in 3 *b*).

Similmente nelle figg. 2 e 3 si scorge l'azione deprimente di soluzioni molto diluite (0,05 *n*) di acido cloridrico su preparati intestinali che non eseguivano più contrazioni ritmiche, essendo stati precedentemente sottoposti ad altri trattamenti. Ma si osservino ancora i tracciati delle figg. 5, 6, 7 e 8. Essi dimostrano, che bastano concentrazioni piccolissime di acido per abbassare rapidamente il tono del preparato; mentre l'aggiunta di piccolissime quantità di alcali è sufficiente ad elevarlo di nuovo o a produrre primariamente una cospicua contrattura. Durante l'abbassamento del tono, per

lo più spariscono anche le contrazioni ritmiche, che però certe volte diminuiscono solamente di altezza.

Vi sono casi, per altro, nei quali l'aggiunta dell'acido non determina un forte abbassamento del tono, forse perchè questo era già depresso, o per altre cause che non saprei indicare.

Nei due esperimenti, ai quali si riferiscono i tracciati delle figg. 9 e 10, oltre a ciò ebbi anche ad osservare un fenomeno degno di nota, che cioè qualche tempo dopo l'aggiunta dell'acido (in piccolissime quantità), il preparato incominciò, e poi continuò per un pezzo a fare contrazioni ritmiche



(Riduz. a metà).

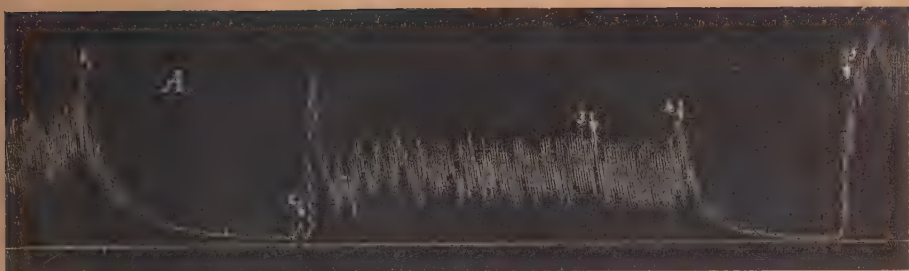
FIG. 7. — Intestino tenue di cane, in 100 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer ossigenato. Temperatura: 34° C. Peso: gr. 10. Tempo: 5'. (14 aprile 1913). In 1. si aggiungono al liquido di Ringer 0,2 cm<sup>3</sup> di soluzione HCl n. In 2. id. 0,3 cm<sup>3</sup> di soluz. NaOH n. In 3. id. 0,1 cm<sup>3</sup> di soluz. di NaOH n. In 4. id. 0,2 cm<sup>3</sup> di soluz. di NaOH n. In 5. id. 1,0 cm<sup>3</sup> di soluz. di NaOH n.

assai più alte di quelle che prima faceva, contrazioni che, nell'esperimento della fig. 10, raggiunsero altezze veramente straordinarie. Nell'uno e nell'altro caso, però, non appena la concentrazione dell'acido ebbe raggiunto, per successive dosi, un certo grado, le contrazioni ritmiche diminuirono di altezza fino a scomparire del tutto. In tutt'e due gli esperimenti, come negli altri, l'alcali produsse forte contrattura.

Si noti la concordanza fra i risultati ora descritti, non ostante che il preparato della fig. 9 fosse immerso in liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico, e quello della fig. 10 in liquido di Ringer normale.

Secondo alcuni (ved. parte 1<sup>a</sup> di questa Nota), l'abbassamento del tono che producono gli acidi sarebbe dovuto all'acido carbonico che essi spostano dal bicarbonato sodico del liquido di Ringer. Se così fosse, gli acidi non dovrebbero produrre lo stesso effetto su preparati immersi in liquido di Ringer privo di bicarbonato. Nel fare gli esperimenti relativi, però, bisogna tener conto di due fatti. Il primo è che, tenendo immerso il preparato in liquido





(Riduz. a metà).

FIG. 8. — Intestino tenue di cane, in 100 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer ossigenato. Temperatura: 31° C. Peso: gr. 8. Tempo: 5'. (21 marzo 1913). A. In 1. si aggiungano al liquido di Ringer 10 cm<sup>3</sup> soluzione 0,01 *n* HCl. In 2. si cambia il liquido di Ringer. In 3. si aggiungono al liquido 5 cm<sup>3</sup> soluz. 0,01 *n* HCl. In 4. id. 10 cm<sup>3</sup> soluz. 0,01 *n* HCl. In 5. id. 0,75 cm<sup>3</sup> soluz. 0,1 *n* NaOH. B. Dopo parecchi minuti, e mentre il preparato si contraeva normalmente: in 1. si aggiungono al liquido di Ringer 1 cm<sup>3</sup> soluz. 0,1 *n* NaOH; in 2. id. 1 cm<sup>3</sup> soluz. 0,1 *n* NaOH; in 3. id. 2 cm<sup>3</sup> soluz. 0,1 *n* NaOH; in 4. si cambia il liquido di Ringer.



(Riduz. a metà).

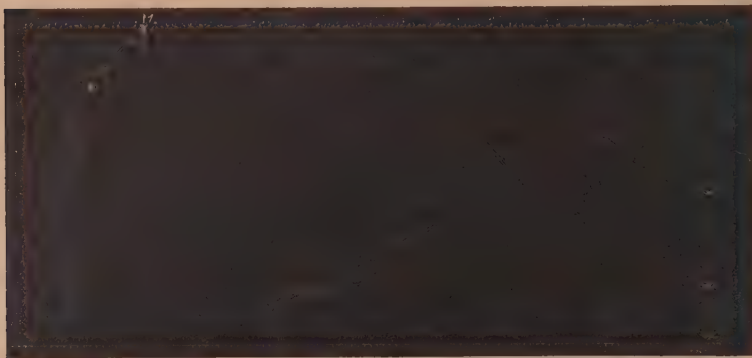
FIG. 9. — Intestino tenue di gatta, immerso in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Ossigeno. Temper.: 38° C. Peso gr. 10. Tempo: 1'. In 1. si aggiungono al liquido di Ringer 1 cm<sup>3</sup> di soluz. 0,01 *n* di HCl; in 2. 1 cm<sup>3</sup> della stessa soluzione; in 3. 1 cm<sup>3</sup> della stessa; in 4. 1 cm<sup>3</sup> della stessa; in 5. e in 6. rispettivamente 1 cm<sup>3</sup> di soluz. 0,1 *n* di NaOH. (16 novembre 1916).

di Ringer privo di bicarbonato, esso presenta già un tono depresso, onde



(Riduz a un terzo).

FIG. 10. — Intestino tenue di gatto, in 50 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer ossigenato. Temperatura: 37° C. Peso gr. 10. Il cilindro fa un giro in 102'. (18 aprile 1913). In 1. si aggiungono al liquido di Ringer 0,1 cm<sup>3</sup> soluz. HCl *n*; in 2. id. 0,1 cm<sup>3</sup> soluzione HCl *n*; in 3. id. 0,2 cm<sup>3</sup> soluz. NaOH *n*. L'accorciamento del preparato, visibile già all'estremità destra di questa figura, si accentua enormemente in seguito (altro tracciato non riprodotto). Cambiato il liquido di Ringer, il preparato continua a fare ampie contrazioni ritmiche.



(Riduz. a un quarto).

FIG. 11. — Intestino tenue di cane, immerso in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Ossigeno. Temper.: 36° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. Il preparato dapprima si allunga spontaneamente, senza fare contrazioni ritmiche; quindi spontaneamente si accorcia, e incomincia a contrarsi ritmicamente. In 1. si aggiunge al liquido 1 cm<sup>3</sup> di soluz. 0,05 *n* di HCl. Dopo molto tempo, il preparato si viene accorciando lentamente, per gradi. (18 dicembre 1916).

l'aggiunta dell'acido non potrà avere che efficacia relativamente minore. In secondo luogo, è impossibile evitare che, sotto l'azione dell'acido aggiunto,



si liberi un poco di acido carbonico dai carbonati contenuti nell'organo medesimo.

Comunque sia, io ho voluto vedere come reagisce agli acidi il preparato intestinale immerso fin dal principio in liquido di Ringer privo di carbonato. Dai tracciati delle figg. 11, 12 e 13 risulta chiaramente, che anche in queste condizioni gli acidi abbassano e gli alcali elevano il tono; onde si deve ammettere, che non ad acido carbonico messo in libertà, ma agli stessi acidi aggiunti è dovuta l'azione deprimente sul tono muscolare, cioè ai loro idrogenioni. Questi nuovi esperimenti confermano quello che sopra ho



(Riduz. a un terzo).

Fig. 12. — Intestino tenue di cane, immerso in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Ossigeno. Temper.: 36,5° C. Peso gr. 10. Tempo: 1'. In 1. e 2. si aggiunge al liquido 0,5 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,05 *n* di HCl; in 3., 0,5 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 *n* di NaOH. (21 dicembre 1916).

detto, che cioè in liquido di Ringer privo di bicarbonato, per un certo tempo, del resto variabile, il preparato intestinale rimane assai disteso e spesso senza contrarsi ritmicamente, o facendo contrazioni ritmiche piccolissime. Ma se si lascia passare qualche tempo, senza aggiungere nulla al liquido di Ringer (oltre all'ossigeno gorgogliante incessantemente), il tono dei preparati (come nelle figg. 11 e 13), si eleva spontaneamente, forse in seguito ad elaborazione da parte dei medesimi di sostanze contratturanti.

Naturalmente, se l'aggiunta dell'acido è fatta dopo tale elevazione spontanea del tono, l'effetto, cioè l'allungamento del preparato, si manifesta in maniera più evidente (figg. 11 e 13). Ma se si osserva bene il tracciato della fig. 12, si vede distintamente che un ulteriore allungamento si verificò anche in questo caso, in cui il preparato presentava ancora, al momento delle due aggiunte successive dell'acido, un tono assai basso.

Degna di nota è, in fine, la tendenza che presenta il preparato intestinale ad accorciarsi spontaneamente, in modo lento e graduale, dopo essersi molto allungato per azione dell'acido.

Abbiamo, dunque, finora potuto constatare l'esistenza di due fattori, che concorrono a mantenere un certo grado di tonicità nella parete intestinale:



(Riduz. a un quarto).

FIG. 13. — Intestino tenue di cane, immerso in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Ossigeno. Temper.: 38° C. Peso gr. 10. Tempo: 1'. Da principio, il preparato si allunga tanto, che è necessario rialzare la leva scrivente (in \*). A un tratto, esso si accorcia spontaneamente. In 1. e in 2, si aggiunge al liquido 0,5 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,05 n di HCl; in 3., 0,5 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 n di NaOH; in 4., 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 n di H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. (21 dicembre 1916).

un lieve grado di alcalinità del liquido che la bagna, e la presenza di speciali sostanze (contratturanti) nel siero del sangue.

Dobbiamo ora indagare se sostanze analoghe si trovano e si formano nella stessa parete intestinale sopravvivente; indagine, questa, che importa fare, perchè se essa desse risultati positivi, si potrebbe anche ammettere che la parete intestinale fosse una sorgente delle sostanze contratturanti esistenti nel sangue.



**Matematica.** — *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni, e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos.* Nota I di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio E. BERTINI.

Le considerazioni delle mie due Note recentemente pubblicate in questi Rendiconti <sup>(1)</sup> si estendono ad uno spazio lineare  $S_r$  di  $r$  dimensioni (con  $r > 3$ ), quando si parta da una configurazione formata (con certe condizioni di cui dirò più innanzi), anzichè di piani e di rette, d'iperpiani e di spazi lineari  $S_{r-2}$  ad  $r-2$  dimensioni. Negli iperspazi però la determinazione di tutte le possibili configurazioni del tipo a cui ho alluso si esaurisce per mezzo di un risultato, che è molto più semplice che non nello spazio ordinario, in quanto che — senza fare nessuna ipotesi preventiva sui numeri  $x, y, n, k$  che tra poco definirò — ne resta caratterizzata unicamente la varietà cubica con 10 punti doppi dell' $S_4$ .

Com'è noto <sup>(2)</sup>, i 10 punti doppi di una tale varietà si distribuiscono in 15 quaterne poste risp. sopra 15 piani, che sono i soli piani contenuti nella varietà; ed esistono 15 spazi (a tre dimensioni) di cui ciascuno contiene tre dei piani, mentre per ognuno dei piani stessi passano tre di quegli spazi. Oltre a ciò, ogni spazio contenente due dei piani ne contiene anche un terzo; e uno dei 15 piani, il quale non giaccia in uno dei 15 spazi, incontra questo spazio in una retta posta sopra uno dei tre piani contenuti nello spazio considerato.

Queste proprietà si invertono completamente col seguente teorema (n. 1):

*Nello spazio  $S_r$  (con  $r > 3$ ) si abbia una configurazione formata di  $x$  spazi  $S_{r-2}$  (tre qualunque dei quali non passanti per uno stesso  $S_{r-3}$ ) e di  $y$  iperpiani, tali che in ognuno degli iperpiani esistano  $n$  degli  $S_{r-2}$  e per ognuno degli  $S_{r-2}$  passino  $k$  degli iperpiani. Si suppongano inoltre soddisfatte queste due condizioni:*

<sup>(1)</sup> *Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XXV, sem. II, 1916, pag. 258; *Proprietà caratteristiche della configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una superficie del terzo ordine*, id., pag. 367.

<sup>(2)</sup> Segre, *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni*, Atti della R. Acc. di Torino, vol. XXII (1887), pag. 791; *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni*, ecc., Memorie della R. Accad. di Torino, serie II, vol. XXXIX (1889), pag. 3; Castelnuovo, *Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a 4 dimensioni*, Atti del R. Istituto Veneto, serie VI, vol. VI (1888), pag. 525. Cfr. pure Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa 1907, pag. 176.

(I) se due degli  $S_{r-2}$  si tagliano in un  $S_{r-3}$ , epperò giacciono in un iperpiano, questo appartenga alla configurazione, quindi contenga altri  $n - 2$  di quegli  $S_{r-2}$ ;

(II) se uno degli  $S_{r-2}$  e uno degli iperpiani non si appartengono, l' $S_{r-2}$  tagli l'iperpiano in un  $S_{r-3}$  situato in uno degli  $n$   $S_{r-2}$  contenuti nell'iperpiano.

Orbene, se, per escludere casi privi d'interesse, si suppone  $n \geq 3$ ,  $k \geq 3$  <sup>(1)</sup>, esiste una sola di siffatte configurazioni, ed è quella formata dai 15 piani di una varietà cubica con 10 punti doppi dell' $S_4$ , e dai 15 spazî (a tre dimensioni) che li contengono a tre a tre.

L'interpretazione di questo teorema nello spazio di quattro dimensioni formato dalle sfere dello spazio ordinario, conduce immediatamente (n. 2) alla notevole configurazione di 15 cerchi dello spazio, che fu per la prima volta studiata dal sig. Stephanos <sup>(2)</sup> e della quale sono così anche poste in evidenza delle proprietà semplici, e di natura interamente elementare, che servono a caratterizzarla.

Nel n. 3 si riprende l'anzidetta varietà cubica dell' $S_4$  allo scopo d'invertire alcune proprietà della configurazione formata dai suoi 10 punti doppi e dai suoi 15 piani.

1. Come nella mia prima Nota citata, i numeri  $x, y, n, k$  sono legati dalle relazioni

$$\begin{aligned} x &= n[(n-1)(k-1) + 1], \\ y &= k[(n-1)(k-1) + 1], \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Per  $k=1$  la configurazione si riduce ad un unico iperpiano e ad un numero qualunque di suoi  $S_{r-2}$ . Se  $k=2$ , essa è formata di due gruppi di  $n$  iperpiani ciascuno, e degli  $n^2$   $S_{r-2}$  in cui gl'iperpiani dell'un gruppo incontrano quelli dell'altro. Se  $n=1$ , la configurazione consta di un unico  $S_{r-2}$  e di un numero qualunque d'iperpiani passanti per esso. Per  $n=2$  si ha  $x=2k$ ,  $y=k^2$ , e i  $2k$   $S_{r-2}$  si distribuiscono in due gruppi  $A', A'', \dots, A^{(k)}$  e  $B', B'', \dots, B^{(k)}$ , di  $k$  spazî ciascuno, in modo che due spazî di uno stesso gruppo si tagliano in un  $S_{r-4}$ , mentre ogni spazîo dell'un gruppo incontra ogni spazîo dell'altro in un  $S_{r-3}$ . Ma allora le intersezioni, ad esempio, di  $A'$  e  $A''$  con  $B'$  debbono avere in comune l' $S_{r-4}$  in cui si secano  $A'$  e  $A''$ , epperò i  $2k$   $S_{r-2}$  passano tutti per un medesimo  $S_{r-4}$ . I due gruppi di  $k$   $S_{r-2}$  si ottengono dunque proiettando  $k$  generatrici di una schiera e  $k$  generatrici dell'altra schiera di una stessa quadrica a due dimensioni, da un  $S_{r-4}$  generico; mentre gli iperpiani della configurazione sono quelli che contengono, negli  $n^2$  modi possibili, due  $S_{r-2}$  dei due gruppi.

<sup>(2)</sup> *Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace*, Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. XCIII (1881), pag. 578; *Sur une configuration de quinze cercles et sur les congruences linéaires de cercles dans l'espace*, id., pag. 633. Le proprietà soltanto enunciate dal sig. Stephanos furono poi dimostrate, con altre, dal signor Koenigs, *Contributions à la théorie du cercle dans l'espace*, Ann. de la Faculté des sciences de Toulouse. série I, t. II (1888), Mém. F, e dal sig. E. Cosserat, *Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace*, id., t. III (1889), Mém. E. Cfr. anche due Note del Cosserat nei Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. CVI (1888), p. 1467 e 1514, e il recentissimo libro del sig. Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere*, Oxford 1916, p. 474 e seg.

epperò  $x > n^2$ . E, come là, si riconosce che, chiamando  $a_{ij}$  gli  $S_{r-2}$  della configurazione, si possono con essi formare il quadro

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ed i  $k-2$  quadri

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}^{(i)} & a_{23}^{(i)} & \dots & a_{2n}^{(i)} \\ a_{31} & a_{32}^{(i)} & a_{33}^{(i)} & \dots & a_{3n}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(i)} & a_{n3}^{(i)} & \dots & a_{nn}^{(i)} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, k-2),$$

ciascuno dei quali ha le due proprietà: 1<sup>a</sup>) gli  $S_{r-2}$  di ogni riga verticale, come pure quelli delle due prime orizzontali, giacciono in uno stesso iperpiano; 2<sup>a</sup>) gli  $S_{r-2}$ , che nella terza, quarta, ...,  $n^{ma}$  orizzontale seguono risp.  $a_{31}, a_{41}, \dots, a_{n1}$ , stanno risp. con questi in un iperpiano.

Si ottengono tutti gli  $S_{r-2}$  della configurazione aggiungendo ai precedenti quelli contenuti nei  $k-2$  iperpiani della configurazione che passano per  $a_{11}$  e sono diversi da  $a_{11} a_{12} \dots a_{1n}$ ,  $a_{11} a_{21} \dots a_{n1}$ .

*Gli  $S_{r-2}$  della configurazione appartengono tutti ad una (sola) ipersuperficie irriducibile d'ordine  $n$ .*

Generalizzando il ragionamento del n. 4 della detta Nota, cominciamo col dimostrare che per gli  $S_{r-2}$  del quadro (1) passa un fascio d'ipersuperficie  $F^n$  d'ordine  $n$ . Perchè una tale  $F^n$  contenga  $a_{11}$ , occorre che sia indeterminata la sua sezione con  $a_{11}$ , ciò che importa  $\binom{n+r-2}{r-2}$  condizioni lineari per  $F^n$ . Lo spazio  $a_{12}$  taglia  $a_{11}$  in un  $S_{r-3}$ ; perciò, se si richiede che  $F^n$  contenga pure  $a_{12}$ , dev'essere indeterminata l'ipersuperficie d'ordine  $n-1$  e di  $r-3$  dimensioni, residua intersezione di  $F^n$  con  $a_{12}$ , e ciò impone ad  $F^n$  (al più) altre  $\binom{n+r-3}{r-2}$  condizioni lineari. Così continuando, risulta che i successivi passaggi di  $F^n$  per  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  importano per  $F^n$  (al più)

$$\binom{n+r-2}{r-2} + \binom{n+r-3}{r-2} + \dots + \binom{r-1}{r-2} = \binom{n+r-1}{r-1} - 1$$





L'ipersuperficie è irriducibile, perchè, se si spezzasse in altre due  $F'$  ed  $F''$ , ad esempio  $a_{11}$  apparterebbe ad  $F'$  e non ad  $F''$ ; quindi anche  $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$ , giacendo in uno stesso iperpiano con  $a_{11}$ , ma non con alcuno degli spazî  $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ , apparterebbero ad  $F'$ , il che è assurdo.

Sia  $F$  l'ipersuperficie così determinata. Se le equazioni di un suo  $S_{r-2}$  sono

$$L = 0, \quad M = 0,$$

l'equazione di  $F$  sarà del tipo

$$L\varphi + M\psi = 0,$$

dove  $\varphi$  e  $\psi$  sono forme di ordine  $n-1$  nelle coordinate. Perciò ogni punto della varietà ad  $r-4$  dimensioni e d'ordine  $(n-1)^2$  in cui si tagliano  $L=0, M=0, \varphi=0, \psi=0$  sarà doppio per  $F$  <sup>(1)</sup>. Una tale varietà doppia di  $F$  esiste dunque in ogni  $S_{r-2}$  della configurazione. Ma, considerando un iperpiano qualunque di questa, le varietà doppie contenute ne' suoi  $n$  spazî  $S_{r-2}$  debbono appartenere agli  $S_{r-3}$  in cui gli stessi  $S_{r-2}$  si tagliano a due a due; per conseguenza ciascuna si spezza in  $n-1$  varietà di ordine  $n-1$ .

In conclusione, in ognuno degli iperpiani della configurazione l'ipersuperficie  $F$  possiede  $\frac{n(n-1)}{2}$  varietà doppie  $V$ , di dimensione  $r-4$  e di ordine  $n-1$ , situate negli  $S_{r-3}$  in cui a due a due s'incontrano gli  $n$   $S_{r-2}$  della configurazione contenuti nell'iperpiano.

Ma se per uno degli  $S_{r-2}$  della configurazione si conducono due iperpiani della medesima, una qualunque delle varietà  $V$  contenute nell' $S_{r-2}$  starà pure e in uno degli altri  $S_{r-2}$  del primo iperpiano e in uno degli altri  $S_{r-2}$  del secondo, cosicchè i tre  $S_{r-2}$  passeranno per un medesimo  $S_{r-3}$ , contrariamente ad una delle ipotesi ammesse.

L'assurdo cade soltanto supponendo  $r=4$  e poi  $n=3$ , il che conduce alla varietà cubica con 10 punti doppî dell' $S_4$ . Così il teorema enunciato in principio è dimostrato.

2. Il sig. Stephanos (loc. cit.) ha studiata una configurazione di 15 cerchi e 15 sfere (nello spazio ordinario), la quale presenta, tra le altre, le seguenti proprietà:

a) sopra ognuna delle sfere esistono tre dei cerchi, e per ognuno dei cerchi passano tre delle sfere;

b) se due dei cerchi stanno sopra una delle sfere, questa sfera è della configurazione, epperò contiene un terzo cerchio della medesima;

c) uno dei cerchi e una delle sfere, che non si appartengano, sono tali che il cerchio seca la sfera in due punti posti sopra uno dei tre cerchi tracciati sulla sfera.

<sup>(1)</sup> Cfr. la citata Memoria del sig. Segre, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni*, n. 5.

Il teorema del numero precedente, applicato allo spazio di sfere, permette senz'altro di affermare che, *inversamente, la configurazione dello Stephanos è la sola composta di  $x$  cerchi (tre qualunque dei quali non passino per i medesimi due punti) e di  $y$  sfere, tali che:*

1) *su ognuna delle sfere stiano  $n$  dei cerchi, e per ognuno dei cerchi passino  $k$  delle sfere;*

2) *ogni sfera che passi per due dei cerchi appartenga alla configurazione, epperò contenga altri  $n-2$  cerchi di questa;*

3) *se uno dei cerchi e una delle sfere non si appartengono, il cerchio incontri la sfera in due punti situati sopra uno degli  $n$  cerchi esistenti su essa.*

Nell'identità che questa configurazione presenta con quella del n. 1 e con quella formata dalle 15 rette d'una superficie cubica estranee ad una bissestupla e dai 15 piani che le contengono a tre a tre, i sei sistemi di cinque cerchi ciascuno, che lo Stephanos ha chiamati *pentacicli*, corrispondono alle sei quintuple di *piani associati* considerate dal Segre e dal Castelnuovo <sup>(1)</sup>, ed ai sei sistemi di cinque rette sghembe che si possono formare con le 15 rette nominate di una superficie cubica. Si può così verificare, ad esempio, la elegante costruzione che lo Stephanos ha assegnata per il pentaciclo determinato da quattro cerchi dati <sup>(2)</sup>; ecc.

(1) Nella prima delle due Note dello Stephanos trovasi già, senza dimostrazione, il teorema relativo ai sistemi di cinque piani associati dell' $S_4$ , che fu poi stabilito, indipendentemente così da quell'autore come l'uno dall'altro, dal Segre e dal Castelnuovo nei citati lavori, e dal Segre anche nella Nota: *Alcune considerazioni elementari sulla identità di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*, Rend. del Circolo mat. di Palermo, t. II (1888), pag. 45.

(2) Questa costruzione si fonda sull'osservazione, dovuta al sig. Darboux [*Sur une nouvelle définition de la surface des ondes*, Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. XCII (1881), pag. 446], che, dati nello spazio tre cerchi  $A, B, C$ , esiste generalmente un cerchio  $K$ , ed uno solo, appoggiato in due punti a ciascuno di essi. Chiamando, col Darboux, *centro radicale* di due cerchi dello spazio il centro radicale di tutte le sfere passanti per i due cerchi, il piano di  $K$  è quello che contiene i tre centri radicali dei cerchi  $A, B, C$  presi a due a due. Il cerchio  $K$  è quindi indeterminato quando e soltanto quando i tre detti centri radicali coincidono, ossia quando e soltanto quando i tre dati cerchi sono ortogonali ad una medesima sfera.

Ora ricordiamo la costruzione data dal Segre e dal Castelnuovo per dedurre da quattro piani generici  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  di  $S_4$  il piano  $\varepsilon$  ad essi associato. Si costruiscono i quattro piani  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  che secano in rette ordinatamente i piani delle terne  $\beta\gamma\delta, \alpha\gamma\delta, \alpha\beta\delta, \alpha\beta\gamma$ , e allora i quattro punti  $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$  giacciono in un piano, che è appunto  $\varepsilon$ . In virtù di quanto precede, la proprietà di qui risultante per il cerchio  $E$ , che completa il pentaciclo determinato da quattro dati cerchi  $A, B, C, D$ , è dunque la seguente. Si considerano i quattro nuovi cerchi  $A', B', C', D'$  che incontrano in due punti risp. i cerchi delle quattro terne  $BCD, ACD, ABD, ABC$ , ed allora esiste un cerchio  $E$  tale che i cerchi di ciascuna delle terne  $AA'E, BB'E, CC'E, DD'E$  hanno lo stesso centro radicale. Questa proprietà trovasi enunciata nella seconda Nota dello Stephanos.





le (b) non possono essere soddisfatte per  $x$  arbitrario perchè  $c'$  e  $c$  sono indipendenti da  $x$ ; la (a) equivale ad

$$(a; b)x = (a'; b')x \quad \text{e} \quad c = c',$$

cioè, per la condizione già nota (cfr. loc. cit.) di identità di due coppie, ad

$$a = a' \quad \text{e} \quad b = b' \quad \text{e} \quad c = c'$$

come si era affermato.

Nelle definizioni (1), (2), ... compariscono *implicitamente* le potenze dell'operatore logico  $\iota$  che nella precedente forma di definizione (1) comparivano esplicitamente. Giova notare che con le (1), (2), ... gli enti  $(a; b; c)$ ,  $(a; b; c; d)$ , ... vengono definiti senza distinguere i casi che due o più degli elementi siano eguali, come è necessario fare per le coppie e come era stato fatto con la precedente definizione di *terna*, ... È ovvio che le due specie di definizioni danno ad  $(a; b; c)$ , ... significati diversi; sceltane una, l'altra non è ammissibile. Del resto la definizione ha come unico scopo di stabilire che *coppia*, *terna*, ... sono nomi di classi e che valgono le (1'), (2'), ...

Risulta che, ad es.,  $(a; b; c)$  è *funzione* della coppia  $((a; b); c)$  ma non è identica a tale coppia; l'identità non è ammissibile, la funzione si purchè sussista la (1').

**Fisica matematica.** — *Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un sottile anello conduttore.* Nota di U. CISORTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il Levi-Civita alcuni anni or sono si occupò (1) della attrazione newtoniana di un tubo sottile (nel quale cioè le sezioni trasversali hanno dimensioni piccole di fronte alla lunghezza del tubo), e riuscì ad assegnare, in forma notevolmente semplice, la risultante delle azioni newtoniane che una fetta elementare (porzione di tubo compresa tra due sezioni trasversali infinitamente vicine) subisce da parte di tutto il rimanente tubo, istituendo infine notevoli e varie applicazioni (2).

(1) Nella pag. 206, 8ª linea dal basso della seconda Nota bisogna correggere un errore di stampa; ad  $\iota a \cup \iota b \cup \iota c$  si deve sostituire  $\iota a \cup \iota b \cup \iota c$ .

(2) *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile.* [Questi Rendiconti vol. XVII (1908), pp. 413-420, 535-551].

(3) *Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno* [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, vol. XXXIII (1912), pp. 354-374]; *Sulle azioni meccaniche dovute ad un flusso filiforme di elettricità* [questi Rendiconti, vol. XVIII (1909), pp. 41-50]; *Teoria asintotica delle radiazioni elettriche* [questi Rendiconti, vol. XVIII (1909), pp. 83-93].

Le eleganti formole stabilite da Levi-Civita si prestano assai bene, e nel modo più spontaneo, alla risoluzione del problema elettrostatico che è titolo e oggetto della presente Nota.

La configurazione geometrica dell'anello si può immaginare determinata dal movimento di una sezione trasversale piana  $\tau$ , la quale pur variando (in modo continuo e mantenendosi piana) si conserva normale alla linea chiusa  $l$  descritta da un suo punto generico (p. es. il baricentro); la linea  $l$  definisce l'andamento longitudinale dell'anello.

La qualifica *sottile* sta a significare che le dimensioni di  $\tau$  sono ovunque piccole di fronte alle dimensioni longitudinali (con che si intende non solo rispetto alla lunghezza di  $l$ , ma anche rispetto al raggio di curvatura in un suo punto generico); p. es. se  $\tau$  è un cerchio di raggio costante  $a$  e la direttrice  $l$  è una circonferenza di raggio  $b$ , l'anello è un toro circolare, sottile se  $a$  è piccolo di fronte a  $b$ .

Ciò premesso, sieno:  $e$  la quantità di elettricità in equilibrio sull'anello conduttore, supposto isolato;  $v ds$  la quantità di elettricità contenuta sopra un pezzo, della superficie  $\sigma$  dell'anello, compresa tra due sezioni trasversali piane  $\tau$  e  $\tau'$  che limitano una fetta di spessore  $ds$  del conduttore. Allora  $v$  — densità elettrica corrispondente alla sezione  $\tau$  dell'anello — rimane definita dalla seguente formola

$$(I) \quad v = \frac{e}{\sqrt{k} \int_1 \frac{ds}{\sqrt{k}}},$$

dove

$$k = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} d\tau \int_{\tau} d\tau_0 \log \frac{l}{PP_0},$$

denotando  $l$  la lunghezza della direttrice designata finora colla stessa lettera,  $P$  e  $P_0$  due generici punti di  $\tau$ ,  $d\tau$  e  $d\tau_0$  due elementi di  $\tau$  ad essi attigui. La quantità  $k$  è un puro numero, che dipende, per un assegnato anello, soltanto dalla sezione  $\tau$  cui si riferisce; essa è, in generale, variabile da sezione a sezione, cioè è funzione dell'arco  $s$  della direttrice  $l$ , contato a partire da un'origine arbitraria. In particolare, se si tratta di sezioni circolari di raggio  $a$ , è

$$k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{l^2}{a^2} \quad (1).$$

La formola (I) mette in rilievo che la densità elettrica  $v$  è indipendente dai caratteri geometrici della direttrice. Influiscono invece questi sulla risultante delle forze elettriche di una generica sezione  $\tau$ : detto  $O$  il punto

(1) Cfr. Levi-Civita, *Sulla gravitazione ecc.*, loc. cit., pag. 362.



comune ad  $l$  e a  $\tau$ , si trova che detta risultante, diretta secondo la normale principale in  $O$  alla direttrice  $l$  (verso la concavità), ha un'intensità  $\Phi$  proporzionale alla curvatura  $c$  di  $l$  in  $O$  e precisamente

$$(II) \quad \Phi = \frac{e^2 c}{\left( \int_1 \frac{ds}{\sqrt{k}} \right)^2}.$$

Se, in particolare, le sezioni trasversali  $\tau$  sono tutte eguali,  $k$  è costante e la (I) e la (II) divengono rispettivamente

$$v = \frac{e}{l}, \quad \Phi = \frac{k e^2 c}{l^2},$$

dalle quali si desume che l'elettricità è uniformemente distribuita tra le sezioni trasversali, mentre il valore della risultante delle forze elettriche varia da sezione a sezione colla curvatura della direttrice.

Va notato che queste conclusioni hanno un carattere « assintotico », cioè tendono a differire tanto meno dal carattere rigoroso quanto più sottile è l'anello conduttore.

1. La giustificazione delle conclusioni testè esposte è immediata.

Si consideri infatti per un momento l'anello costituito da masse quali si sieno. Sia  $\Phi ds$  la risultante delle azioni newtoniane subite da una fetta elementare di spessore  $ds$  (compresa tra una sezione  $\tau$  e una sezione vicinissima), da parte di tutto l'anello; se  $v ds$  è la quantità di materia localizzata nella fetta, e se  $\mathbf{t}$  è il vettore unitario diretto secondo la tangente in  $O$  a  $l$  (nel senso delle  $s$  crescenti), e  $\mathbf{n}$  quello diretto secondo la normale principale (nel verso della concavità) si ha <sup>(1)</sup>

$$(I) \quad \Phi = \frac{d(v^2 k)}{ds} \mathbf{t} + v^2 k c \mathbf{n}.$$

Si supponga trattarsi di masse elettriche; allora sono nulle le forze elettriche nei punti interni dell'anello, mentre sulla sua superficie  $\sigma$  — superficie di livello — le forze elettriche sono dirette normalmente ai singoli elementi superficiali ai quali si riferiscono; ne consegue

$$\Phi \times \mathbf{t} = 0.$$

Per questa dalla (I) scende

$$(2) \quad v^2 k = \text{costante},$$

<sup>(1)</sup> Cfr. Levi-Civita, *Sulla gravitazione*, ecc., loc. cit., pag. 364.

e la (1) stessa si cangia nella seguente

$$(3) \quad \Phi = v^2 k c n.$$

La costante che compare nel secondo membro della (2) va determinata in modo che la carica totale del conduttore risulti eguale a quella, che si suppone prefissata. Detta  $e$  tale carica, si deve avere

$$\int_1 v ds = e;$$

la quale condizione è soddisfatta se per la costante accennata si assume il quadrato di

$$\frac{e}{\int_1 \frac{ds}{\sqrt{k}}},$$

con che dalla (2) e dalla (3) si ha in definitiva

$$v = \frac{e}{\sqrt{k} \int_1 \frac{ds}{\sqrt{k}}}, \quad \Phi = \frac{e^2 c}{\left( \int_1 \frac{ds}{\sqrt{k}} \right)^2} n.$$

**Matematica.** — *Sulla probabilità come limite della frequenza.*

Nota di F. P. CANTELLI, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

1. Per accennare rapidamente allo scopo di questa Nota, comincio col ricorrere al solito schema dell'urna, contenente palline bianche e palline nere, che serve ad illustrare il noto teorema di Bernoulli.

Supponendo che estratta una pallina questa si rimetta nell'urna, dopo averne osservato il colore, conveniamo che, in *ogni prova*, sia costantemente eguale a  $p$  la probabilità di estrarre pallina bianca e quindi eguale a  $1 - p = q$  la probabilità di estrarre pallina nera.

Se si procede a delle estrazioni *successive* nel modo anzidetto, e se si indica con  $b_k$  il numero delle volte che, in  $k$  estrazioni, si sarà presentata pallina bianca, si realizzerà, in  $s$  prove, la successione di frequenze

$$(1) \quad \frac{b_1}{1}, \frac{b_2}{2}, \dots, \frac{b_s}{s}.$$

La questione qui studiata riguarda l'ammissione fatta da qualche autore <sup>(1)</sup>, che la successione (1) al crescere di  $s$ , si comporta come se ten-

<sup>(1)</sup> Cfr. H. Bruns, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre* (B. Teubner, Leipzig und Berlin 1906), pp. 13, 14. R. de Montessus, *Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités* (Gauthier Villars, Paris 1908), pp. 1-7, 15-18. Tullio Bagni, *Teoria matematica dei fenomeni collettivi* (G. Barbera, Firenze 1915), pp. X-XII.

desse al limite  $p$ ; che, anzi, la probabilità  $p$  possa considerarsi come limite della successione (1), quando questa potesse suppersi indefinitamente prolungata.

Ora se, per precisare, si vuol ritenere che la tendenza di cui si parla sia la ordinaria tendenza ad un limite, sorge il dubbio che le fatte ammissioni possano condurre a contraddizioni nel calcolo delle probabilità. Tanto più che se si pensa, ad esempio, che la probabilità, pur supposta determinabile, della ordinaria tendenza della (1) verso  $p$  equivale, come è intuitivo e come si vedrà chiaramente in seguito, ad una probabilità relativa al verificarsi di una successione illimitata di *assegnati* eventi, viene legittimo il dubbio che essa possa riuscire infinitesima.

In questa Nota mi occupo appunto della ricerca della probabilità che la (1) tenda a  $p$ , col crescere indefinito di  $s$ ; mi pongo, anzi, da un punto di vista più generale di quello illustrato dal riportato *schema ad urna*.

2. In questo numero indico un teorema che si riferisce alla probabilità della coesistenza di una successione illimitata di eventi. Tale teorema assume, in questo scritto, importanza fondamentale per il collegamento che ne faccio con un altro teorema, che si trova dimostrato in un mio precedente lavoro <sup>(\*)</sup> e che richiamo nel numero successivo; essi permetteranno di argomentare sulla probabilità ricercata.

Cominciamo dal considerare tre eventi compatibili  $i_1, i_2, i_3$  e gli eventi, rispettivamente contrari ai precedenti,  $e_1, e_2, e_3$ .

Indicando con  $p_\alpha$  la probabilità che si verifichi un evento  $\alpha$ , con  $p_{\alpha\beta\gamma}$  la probabilità che si verifichino insieme tre eventi  $\alpha, \beta, \gamma$ , si ha:

$$(2) \quad p_{i_1 e_2 e_3} + p_{i_2 e_1 e_3} + p_{i_3 e_1 e_2} + p_{e_1 i_2 i_3} + p_{e_2 i_1 i_3} + p_{e_3 i_1 i_2} + p_{i_1 i_2 i_3} + p_{e_1 e_2 e_3} = 1$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{e_1 i_2 i_3} + p_{e_1 i_2 e_3} + p_{e_1 e_2 i_3} + p_{e_1 e_2 e_3} = p_{e_1} \\ p_{e_2 i_1 i_3} + p_{e_2 i_1 e_3} + p_{e_2 e_1 i_3} + p_{e_2 e_1 e_3} = p_{e_2} \\ p_{e_3 i_1 i_2} + p_{e_3 i_1 e_2} + p_{e_3 e_1 i_2} + p_{e_3 e_1 e_2} = p_{e_3} \end{array} \right.$$

Ora, se si paragonano la (2) e le (3) si deduce, senza difficoltà,

$$(4) \quad p_{i_1 i_2 i_3} \geq 1 - (p_{e_1} + p_{e_2} + p_{e_3}).$$

In generale si dimostra che:

*La probabilità che si verifichino simultaneamente  $n$  eventi compatibili  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , non è inferiore all'unità diminuita della somma delle*

(\*) Cfr. *Sulla legge dei grandi numeri*. Memorie della R. Accademia dei Lincei serie 5<sup>a</sup>, vol. XI (1916).



probabilità relative al verificarsi di ciascuno degli eventi, rispettivamente contrari ai precedenti,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  <sup>(3)</sup>.

Si possono considerare delle successioni *illimitate* di eventi. Per una tal successione

$$(5) \quad i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$$

tenendo presente che si ha, per qualunque valore di  $k$ ,

$$(6) \quad p_{i_1 i_2 \dots i_k} \geq p_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}},$$

si deduce che la successione illimitata di numeri non crescenti

$$(7) \quad p_{i_1 i_2 \dots i_n}, p_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}, \dots, p_{i_1 i_2 \dots i_{n+k}}, \dots$$

tende ad un limite  $l$ .

Si è così condotti ad assumere questo limite  $l$  per la probabilità della coesistenza di tutti gli eventi della successione (5); ossia per la probabilità che non esista alcun evento, della successione (5), il quale non si verifichi.

Tale assunto non può portare ovviamente ad obiezioni teoriche e risponde al sentimento che la probabilità, empiricamente considerata, risveglia in noi.

Se ammettiamo ancora che la serie

$$(8) \quad p_{e_1} + p_{e_2} + \dots + p_{e_n} + \dots$$

sia convergente, risulta, per quanto è stato detto sopra,

$$(9) \quad l \geq 1 - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} p_{e_\alpha}.$$

3. Assumo come note <sup>(4)</sup> le definizioni di *variabile casuale*, di *valore medio di una variabile casuale* nonché le più semplici operazioni che possono effettuarsi sulle menzionate variabili. Ciò posto, consideriamo una successione illimitata di variabili casuali *indipendenti*, nel senso del calcolo delle probabilità,

$$(10) \quad X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

e la successione di variabili casuali *dipendenti*

$$(11) \quad X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}, \dots$$

in cui è

$$(12) \quad X_{(n)} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

<sup>(3)</sup> Cfr. G. Boole, *An investigation of the laws of thought* (Macmillan and Co., London 1854), pag. 307.

<sup>(4)</sup> Loc. cit. <sup>(\*)</sup>.



e si tengano presenti le formole (16), (17), (19), nonchè il teorema rappresentato dalla (9): Si deduce, senza difficoltà, che *un confine inferiore della probabilità  $l_{(n)}$  relativa alla coesistenza delle ineguaglianze della successione illimitata* (20), è dato da

$$(21) \quad 1 - \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\sigma_{4,(n+i)}}{\alpha_{n+i}^4 \cdot (n+i)^3} - 3 \sum_{i=0}^{i=\infty} \left(1 - \frac{1}{n+i}\right) \frac{\sigma'_{2,(n+i)}}{\alpha_{n+i}^2 \cdot (n+i)^2}$$

se le serie rappresentate dai precedenti sommatori sono convergenti (\*).

Ora, se si suppone che  $\sigma_{4,(s)}$  e  $\sigma'_{2,(s)}$ , [ $s = 1, 2, \dots$ ] ammettano rispettivamente i limiti superiori finiti A e B e se si pone

$$(22) \quad \alpha_{n+s} = \frac{\delta}{(n+s)^{\frac{1}{4}(1-\xi)}},$$

essendo  $\delta$  e  $\xi$  due numeri positivi da determinare opportunamente, si deduce dalla (21):

$$(23) \quad l_{(n)} > 1 - \frac{A}{\delta^4} \left( \frac{1}{n^{2+\xi}} + \dots + \frac{1}{(n+k)^{2+\xi}} + \dots \right) - 3 \frac{B}{\delta^4} \left( \frac{1}{n^{1+\xi}} + \dots + \frac{1}{(n+k)^{1+\xi}} + \dots \right).$$

Perchè le serie che figurano nella (23) siano convergenti bisogna che sia  $\xi > 0$ , e se è  $\xi < 1$  sarà anche

$$(24) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_{n+s} = 0,$$

la quale condizione si renderà utile nel numero seguente.

Ancora, quando si tenga presente che si ha per  $s > 1$ , come è facile dimostrare,

$$(25) \quad \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} + \dots + \frac{1}{(n+k)^s} + \dots < \frac{2^{s-1}}{2^s - 1} \cdot \frac{1}{n^{s-1}}$$

si può scrivere, invece della (23),

$$(26) \quad l_{(n)} > 1 - \frac{A}{\delta^4} \frac{2^{1+\xi}}{2^{1+\xi} - 1} \frac{1}{n^{1+\xi}} - 3 \frac{B}{\delta^4} \frac{2^\xi}{2^\xi - 1} \cdot \frac{1}{n^\xi}.$$

5. Nelle ipotesi fatte, e quando sia pure  $0 < \xi < 1$ , è stato precedentemente dimostrato che si ha una probabilità fornita dalla (26) che le variabili casuali della successione illimitata

$$(27) \quad M - X_{(n)}, M - X_{(n+1)}, \dots, M - X_{(n+k)}, \dots,$$

(\*) È da osservare che la nota *legge dei grandi numeri* si deduce dalla probabilità relativa alla prima soltanto delle (20), prescindendo dalla *coesistenza* di quest'ultima con tutte le ineguaglianze successive.



simultaneamente considerate, assumano rispettivamente valori di intervalli la cui misura tende a zero.

E poichè si ha, per la (26) stessa,

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_{(n)} = 1$$

si può concludere, senza difficoltà, che è prossima all'unità quanto si vuole la probabilità che le variabili casuali della successione

$$(29) \quad X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}, \dots$$

assumano valori che tendano, nel senso ordinario, al limite  $M$  (\*).

6. Applico il teorema generale, precedentemente dimostrato, al caso particolare di cui al n. 1. In base ai simboli sin qui adoperati, questo caso equivale a supporre che la  $X_n$  sia una variabile casuale che possa assumere il valore 1 con probabilità  $p$  e il valore 0 con probabilità  $q = 1 - p$ , e si ha:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E(X_n) = p, & E[X_{(n)}] = p, \\ E(X_n - p)^2 = pq, & E[X_{(n)} - p]^2 = \frac{pq}{n}, \\ E(X_n - p)^4 = pq - 3p^2q^2, & E[X_{(n)} - p]^4 = 3 \frac{p^2q^2}{n^2} + \frac{pq}{n^3} - \frac{6p^2q^2}{n^3}, \\ A = pq - 3p^2q^2, & B = p^2q^2. \end{array} \right.$$

Quando si faccia poi, ad es.,  $\xi = \frac{1}{2}$ , e quindi

$$(31) \quad \alpha_{n+s} = \frac{\delta}{(n+s)^{\frac{1}{8}}} = \left( \frac{n}{n+s} \right)^{\frac{1}{8}} \cdot \alpha_n,$$

(\*) Interessa osservare che, se invece di basare la ricerca sulle (18), (19) essa fosse stata basata sul noto teorema di Bienaymé-Tchebychef, oppure sull'espressione integrale della probabilità (Laplace) completata da un confine superiore dell'errore (A. Liapounoff), le serie da studiare sarebbero riuscite divergenti. D'altra parte può pervenirsi a confini inferiori della probabilità  $l_{(n)}$  più convenienti di quelli qui ottenuti, basandosi su teoremi che ho altrove dimostrato (\*), confini dei quali qui non mi occupo per necessità di spazio. Nel caso particolare di cui mi occupo al numero seguente, pure con lo scopo di rilevare la portata della (26), può anche pervenirsi a risultati più convenienti usufruendo, insieme con le considerazioni di cui al n. 2, di teoremi, dovuti a De la Vallée-Poussin e a P. Mansion, dei quali sono date indicazioni nelle citate *Leçons* di R. de Montessus.

(6) *Intorno ad un teorema fondamentale della teoria del rischio* (Bollettino dell'Associazione degli Attuari, n. 24, Milano 1911).



sidère enfin des fractions de composition. Tous ces symboles  $\overset{*}{f}^0, \overset{*}{f}^{-1}$ , fractions de composition, sont entièrement formels, ainsi que les calculs de composition que l'on peut effectuer sur eux.

Cependant, dans une certaine mesure, ces calculs formels correspondent à des calculs effectués sur des fonctions ordinaires. C'est ainsi par exemple, que, d'après la définition même du symbole  $\overset{*}{f}^{-1}$ , dire que

$$\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{\psi},$$

n'est pas autre chose que dire que  $\varphi$  est la solution de l'équation intégrale

$$(1) \quad \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\psi}.$$

Il n'en était pas moins intéressant, théoriquement, comme pratiquement, de réduire autant que possible la part de symbolisme dans la théorie des fonctions d'ordre quelconque.

J'y arrive ici, grâce à une extension très naturelle de la notion de composition. Je prouve ainsi qu'une fonction d'ordre négatif non entier est une fonction au sens ordinaire du mot, dont la composition (généralisée) avec d'autres fonctions, jouit des propriétés classiques. Dans la définition d'une fonction d'ordre nul ou entier négatif, reste forcément un élément formel; je l'ai réduit au minimum.

Comme application je résoud (§ 4) l'équation (1) quels que soient les ordres de  $f$  et de  $\psi$ , sans avoir à me préoccuper des restrictions relatives à ces ordres que l'on devait faire jusqu'à présent.

J'espère que ces recherches contribueront à montrer l'intérêt des symboles introduits, grâce à une analyse si élégante, par M.<sup>r</sup> V. Volterra.

## § 2. — LES FONCTIONS D'ORDRE RÉGULIER.

Une fonction de forme

$$f(x.y) = \frac{(y-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x.y)$$

$\alpha$  étant un nombre différent de zéro et d'un entier négatif et  $\varphi(x.x)$  étant différent de zéro <sup>(1)</sup> sera dite fonction de l'ordre régulier  $\alpha$ . Nous admettons, pour simplifier,  $\varphi(x.y)$  holomorphe dans un domaine autour d'un point de la droite  $x = y$ , domaine dans lequel nous nous maintiendrons <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Pour le moment, il suffit d'admettre que  $\varphi(x,x)$  n'est pas identiquement nul. C'est seulement pour la résolution d'une équation de forme (1), qu'il est utile de supposer  $\varphi(x,x)$  constamment différent de zéro.

<sup>(2)</sup> On peut remplacer, sans rien changer à ce qui suit, cette condition d'holomorphic de  $\varphi$  par l'existence d'un développement limité de Taylor poussé assez loin.



Soit une seconde fonction d'ordre régulier  $\beta$

$$g(x, y) = \frac{(y - x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \gamma(x, y);$$

si de plus  $\alpha + \beta$  est également régulier <sup>(1)</sup>, le résultat de leur composition sera

$$\dot{f} \ddot{g}(x, y) = \overline{\int_x^y f(x, \xi) g(\xi, y) d\xi}$$

la barre qui surmonte cette intégrale indiquant qu'il faut en prendre la *partie finie* <sup>(2)</sup>. L'intégrale précédente

$$\overline{\int_x^y \frac{(y - \xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(\xi - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x, \xi) \gamma(\xi, y) d\xi}$$

est donc égale à

$$\lim_{\substack{x_1=x \\ y_1=y}} \left\{ \int_{x_1}^{y_1} \frac{(y - \xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(\xi - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x, \xi) \gamma(\xi, y) d\xi - \right. \\ \left. - A(x_1) (x_1 - x)^\alpha - B(y_1) (y - y_1)^\beta \right\}$$

$x_1$  et  $y_1$  tendant indépendamment vers leur limite, A et B étant des fonctions de  $x_1$  et de  $y_1$  <sup>(3)</sup> respectivement holomorphes autour de  $x_1 = x$  et  $y_1 = y$  et choisies de façon que la limite existe; cette limite étant indépendante de choix des fonctions A et B <sup>(4)</sup>.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs la partie finie se réduit à l'intégrale ordinaire.

En s'appuyant sur le fait, facile à démontrer, que

$$\overline{\int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - t)^{\beta-1} dt} = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  réguliers, et en suivant à peu près la même méthode

<sup>(1)</sup> Cette dernière hypothèse, qui n'est pas nécessaire pour que la partie finie ait un sens, est pourtant essentielle, comme on s'en rendra compte.

<sup>(2)</sup> Je renvoie, pour la définition et les propriétés de la *partie finie* aux travaux de M. Hadamard qui a introduit ce symbole (Annales de l'École Normale, 1905).

<sup>(3)</sup> On sait que l'on déduit de cette expression de la *partie finie* d'autres expressions, très commodes pour son calcul effectif.

<sup>(4)</sup> A et B dépendent aussi des variables  $x$  et  $y$ ; elles ne jouent aucun rôle, aussi ne les écrivons nous pas.

que pour les ordres positifs, on obtient les propriétés suivantes, bien connues si  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs:

I.  $\check{f}\check{g}$  est une fonction d'ordre régulier  $\alpha + \beta$ .

II. On a

$$D(\check{f}\check{g}) = D(\check{f}) \times D(\check{g})$$

en nommant  $D(\check{f})$ , diagonale de  $\check{f}$ , la fonction  $\varphi(x, x)$  <sup>(1)</sup>.

III. Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont permutables on a

$$\frac{[D(\check{f})]^{1, \alpha}}{[D(\check{g})]^{1, \beta}} = \text{constante} \text{ } ^{(2)}.$$

Enfin on peut établir que la composition, ainsi généralisée, obéit encore aux règles de calcul de la multiplication ordinaire. On établit que

$$V. \quad \check{f}(\check{g} + \check{h}) = \check{f}\check{g} + \check{f}\check{h} \text{ } ^{(3)}.$$

Il est un peu plus délicat d'établir que

$$VI. \quad \check{f}(\check{g}\check{h}) = (\check{f}\check{g})\check{h}$$

$\check{f}, \check{g}, \check{h}$  étant 3 fonctions d'ordres réguliers  $\alpha, \beta, \gamma$ . Il faut bien entendu, supposer aussi que tous les ordres des fonctions qu'il faut envisager pour effectuer les opérations indiquées dans VI sont réguliers: c'est-à-dire que  $\beta + \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma$  sont aussi réguliers.

La proposition VI s'établit indirectement comme il suit: on l'établit d'abord dans les 3 cas particuliers suivants:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \check{1}(\check{g}\check{h}) = (\check{1}\check{g})\check{h} \\ (\check{f}\check{g})\check{1} = \check{f}(\check{g}\check{1}) \\ \check{f}(\check{1}\check{h}) = (\check{f}\check{1})\check{h} \end{array} \right.$$

(1) M.<sup>r</sup> Volterra donne de  $D(f)$  une définition un peu différente, mais équivalente.

(2) Dans cette équation les puissances représentent des puissances ordinaires et non des puissances de composition. J'avais établi cette formule pour  $\alpha$  et  $\beta$  entiers positifs. M.<sup>r</sup> Volterra l'a récemment démontrée pour  $\alpha$  et  $\beta$  positifs quelconques.

(3) Pour que le fonction  $\check{g} + \check{h}$  soit de celles que nous avons définies au début du § 2, il faut que les ordres de  $g$  et  $h$  diffèrent d'un entier. Il y a lieu alors de démontrer V et c'est aisé. Si non la formule V sera la définition de  $\check{f}(\check{g} + \check{h})$ .

ce qui n'offre pas de difficultés grâce à des différentiations sous le signe intégrale et grâce à des intégrations par parties qui se font aisément malgré la présence des signes *partie finie*. On prouve ensuite que démontrer la formule (VI) revient à démontrer la suivante :

$$\dot{\bar{1}} (\dot{\bar{f}} \dot{\bar{g}} \dot{\bar{h}}) = \dot{\bar{1}} ((\dot{\bar{f}} \dot{\bar{g}}) \dot{\bar{h}})$$

qui s'écrit, grâce à la première des formules (1)

$$(\dot{\bar{1}} \dot{\bar{f}}) (\dot{\bar{g}} \dot{\bar{h}}) = ((\dot{\bar{1}} \dot{\bar{f}}) \dot{\bar{g}}) \dot{\bar{h}}$$

on a ainsi remplacé la fonction  $f$  par la fonction  $\dot{\bar{1}} \dot{\bar{f}}$  d'ordre  $\alpha + 1$ .

En continuant de même, on pourra se ramener au cas où la fonction  $f$  est d'ordre positif aussi grand que l'on veut. On pourra, par un procédé analogue, se ramener au cas où la fonction  $h$  est d'ordre positif. Mais la fonction  $f$  d'ordre grand peut toujours s'écrire  $\dot{\bar{f}}_1 \dot{\bar{1}}$ ,  $\dot{\bar{f}}_1$  étant une nouvelle fonction d'ordre positif et la formule VI, grâce à la troisième des formules (1), s'écrit encore

$$\dot{\bar{f}}_1 ((\dot{\bar{1}} \dot{\bar{g}}) \dot{\bar{h}}) = (\dot{\bar{f}}_1 (\dot{\bar{1}} \dot{\bar{g}})) \dot{\bar{h}}$$

la fonction  $g$  est ainsi remplacée par la fonction  $\dot{\bar{1}} \dot{\bar{g}}$  d'ordre supérieur  $\beta + 1$ . On voit que finalement il suffit d'établir la propriété si  $f$ ,  $g$ ,  $h$  sont d'ordres positifs; mais alors les signes *partie finie* disparaissent, il n'y a plus aucune difficulté.

En particulier M.<sup>r</sup> Volterra a montré (1) que, si  $\zeta$  est positif quelconque, on peut écrire

$$(2) \quad \dot{\bar{1}} \zeta = \frac{(y-x)^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)}$$

avec les règles de calcul suivantes :

$$(3) \quad \dot{\bar{1}} \zeta \dot{\bar{1}} \zeta' = \dot{\bar{1}} \zeta + \zeta' \quad (\dot{\bar{1}} \zeta)^n = \dot{\bar{1}} \zeta^n.$$

Il n'y a aucune difficulté à étendre la définition (2) et les règles de calcul (3) si  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $\zeta + \zeta'$ ,  $\zeta^n$  sont réguliers quelconques.

Dans une prochaine Note nous définirons et étudierons les fonctions d'ordre nul ou entier négatif.

(1) Mémoire déjà cité, p. 23.



Storia della Matematica. — *Sur les nombres infinis de Fontenelle*. Nota del prof. BRANISLAV PETRONIEVICS, presentata dal Socio VERONESE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra un metodo generale per rendere selettive le stazioni radiotelegrafiche*. Nota di A. ARTOM, presentata dal Socio P. BLASERNA <sup>(1)</sup>.

I. Nei miei precedenti lavori <sup>(2)</sup> ho esposto diversi metodi per conferire alle stazioni radiotelegrafiche o radiotelefoniche ricevitrici la proprietà di essere selettive, cioè di poter ricevere chiaramente i radiotelegrammi eliminando quei disturbi che possono provenire dalla elettricità atmosferica, nonchè quelli cagionati dalle stazioni colle quali non si desidera di comunicare.

Poichè si tratta di una questione di grande interesse scientifico e tecnico, e poichè le applicazioni pratiche dei metodi da me indicati ne hanno dimostrata l'efficacia, credo utile esporre in questa Nota in qual modo alcuni dei metodi da me studiati possano coordinarsi assieme e farsi concorrere allo scopo di assicurare la indipendenza di funzionamento delle stazioni radiotelegrafiche riceventi.

Per conferire alle stazioni radiotelegrafiche un elevato grado di selettività, ho pensato fin dai primordi della radiotelegrafia (1896) di applicare oltre al concetto fisico derivante dalla teoria herziana, della sintonia od accordo elettromagnetico fra le diverse stazioni, altri concetti fisici allo scopo di fare ad esse assumere spiccate caratteristiche fisiche che meglio servano a distinguere l'una dalle altre. Ho quindi, a questo fine, tenuto presente le analogie esistenti fra i fenomeni dell'ottica e quelli delle radiazioni elettriche, ed ho basato le mie ricerche sperimentali sopra i seguenti principii fisici:

1) Il principio della dirigibilità delle onde elettriche, tanto alla trasmissione, quanto alla ricezione;

2) il principio della composizione vettoriale delle onde elettromagnetiche irradiate o ricevute;

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel R. Politecnico di Torino, gennaio 1917.

<sup>(2)</sup> Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, A. Artom, 15 marzo 1908; 5 febbraio 1905; 17 giugno 1906; 3 gennaio 1915. Atti della Associazione Elettrotecnica 1908.

3) Il principio della composizione vettoriale dei flussi magnetici generati dalle correnti oscillatorie di trasmissione, oppure prodotti dalle correnti di ricezione.

Come corollario di questo terzo principio ho considerato il caso particolare nel quale i flussi magnetici generati dalle correnti di ricezione di due o più aerei dirigibili oppure non dirigibili, abbiano la stessa direzione ma verso contrario.

È questo il concetto che io ho applicato fin dal 1900, che ho denominato « metodo differenziale » e che la pratica ha dimostrato essere di capitale importanza per eliminare nelle ricezioni delle comunicazioni radiotelegrafiche i disturbi atmosferici e quelli provenienti dalle stazioni colle quali non si desidera comunicare.

Questi principii fisici, sopra i quali ho fondato le mie ricerche, hanno dato luogo ad importanti risultati tecnici ormai largamente consacrati nel dominio della pratica applicazione.

Credo interessante ricordare ancora come dal punto di vista matematico i concetti esposti permettano di estendere le leggi della teoria delle grandezze vettoriali ai fenomeni di trasmissione e di ricezione radiotelegrafica.

Così potrà attribuirsi alla radiazione emanante o raccolta da un aereo dirigibile una determinata direzione, ampiezza e fase e considerarla quindi come una grandezza vettoriale.

Per quanto concerne i flussi magnetici generali dalle correnti circolanti negli apparati di trasmissione o di ricezione, è ovvio che, come avviene nell'elettromagnetismo, essi possano rappresentarsi con delle grandezze vettoriali.

Altre grandezze vettoriali dovranno essere considerate per estendere la teoria dei campi vettoriali allo studio dei fenomeni radiotelegrafici e questo argomento formerà oggetto di ulteriori studi.

II. Per mettere in attuazione il primo dei concetti fisici esposti, quello della dirigibilità delle onde elettriche, ho ideato e sperimentato con successo diversi metodi che ho esposto nelle mie precedenti Note.

Di tali ricerche ricordo qui solamente che l'applicazione pratica del metodo della composizione delle onde irradiate per ottenere la dirigibilità mi ha condotto alla ideazione di forme particolari di aerei dirigibili costituiti da conduttori inclinati disposti fra loro secondo determinati angoli, perchè la composizione potesse aver luogo. — Di queste forme di aerei sono casi particolari le forme triangolari (fig. 1) e quadrangolari, la cui origine sta di per sé stessa a dimostrare la loro priorità sopra altre forme di antenne ed anche sopra quanto concerne altri concetti proposti da alcuni autori e che non sono stati seguiti da alcune notevoli pratiche applicazioni.

I risultati delle mie ricerche sperimentali sulla dirigibilità delle onde elettriche sono stati constatati col concorso della R. Marina Italiana, a

distanza di oltre cinquecento chilometri, e si è accertata la possibilità di far sì che invece di irradiare le onde elettriche sfericamente attorno all'antenna trasmittitrice, esse si irradino per contro secondo settori sferici limitati da piani verticali: alla stessa guisa di immensi proiettori di luce le stazioni dirigibili da me studiate, inviano le radiazioni elettriche a quelle stazioni radiotelegrafiche colle quali si vuol comunicare rimanendo escluse, cioè nella oscurità, quelle stazioni colle quali non si vuol comunicare.

Alla ricezione delle onde elettriche, gli stessi aerei dirigibili raccolgono esclusivamente quelle trasmissioni che provengono dalle direzioni comprese in settori che hanno per piano di simmetria il piano dell'aereo dirigibile ricevente.

Conseguenze sostanziali di queste proprietà del sistema dirigibile ricevente da me studiato, sono:

1) Un notevole grado di selettività perchè le stazioni dirigibili raccolgono in prevalenza le comunicazioni che provengono da quelle stazioni



FIG. 1.

che si trovano nel settore che ha per piano di simmetria il piano dell'aereo dirigibile, escludendo le altre che non si trovino in tali condizioni di orientazione rispetto all'aereo ricevente;

2) La determinazione della posizione in cui si trova la stazione che trasmette i segnali <sup>(1)</sup>.

Queste proprietà del sistema dirigibile ricevente sono state in seguito utilizzate anche costruendo apparati fondati sul terzo principio enunciato <sup>(2)</sup> cioè sul principio della composizione dei flussi magnetici delle correnti di ricezione e sul caso particolare del metodo differenziale <sup>(3)</sup>.

III. Esposti così i criteri generali che mi guidarono nelle ricerche sperimentali, intendo nella presente Nota dimostrare come tali principi si applichino con grande vantaggio per conferire alle stazioni ricevitrici di radiotelegrafia o di radiotelegrafia un elevato grado di selettività.

(<sup>1</sup>) Lettera a S. E. Mirabello, ministro della Marina, in data 29 novembre 1905.

(<sup>2</sup>) Attestato di privativa 18 dicembre 1902 e completivi.

(<sup>3</sup>) Attestato di privativa 14 aprile 1905.



Perciò prendo come esempio una stazione ricevente dirigibile del tipo da me ideato nel quale sono disposti quattro aerei dirigibili orientati secondo diverse direzioni azimutali, e di cui le rette AA, BB, CC, DD, rappresentano le proiezioni orizzontali (fig. 3).

I circuiti di questi aerei sono anzitutto sintonizzati mediante le opportune variazioni di capacità ed induttanza, seguendo i procedimenti ordinari della tecnica radiotelegrafica. Quindi applico i principi fisici sopra esposti e precisamente quello relativo alla composizione dei flussi magnetici delle correnti di ricezione, accoppiato al caso particolare di esso, cioè al metodo differenziale.

Seguendo questi concetti ho ideato due classi di apparati: l'una per effettuare la composizione vettoriale dei flussi magnetici delle correnti di ricezione; l'altra per effettuare la composizione negativa o differenziale di essi.

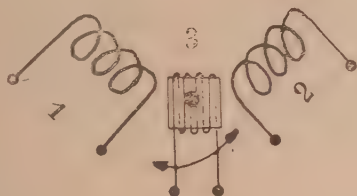


FIG. 2.

Per provocare la composizione dei flussi magnetici provenienti dagli aerei dirigibili, mi sono servito di due apparati.

Il primo rappresentato nella fig. 2 è costituito da tre rocchetti disposti angularmente.

Il rocchetto centrale è collegato coll'apparato rivelatore di onde elettriche, ed è girevole attorno all'asse verticale di simmetria, allo scopo di riconoscere la direzione del flusso risultante dalla composizione dei flussi magnetici delle correnti circolanti in 1 e 2.

Questi avvolgimenti, sono come mostra la fig. 2, angularmente disposti e percorsi dalle correnti provenienti dagli aerei dirigibili, pure essi facenti angolo fra loro.

Il secondo apparato da me scelto è a forma di toro <sup>(1)</sup>, o meglio di corona circolare di un disco piano (fig. 3).

Una spirale continua è avvolta sopra un nucleo a forma di toro costituito da sostanza isolante. Gli estremi degli aerei dirigibili penetrano nella spirale da punti diametralmente opposti, cosicchè i flussi delle correnti che giungono dagli aerei dirigibili occupano le due metà del toro e seguono

(<sup>1</sup>) Attestato di privativa 4 giugno 1906 e completivi.

approssimativamente le direzioni azimutali secondo le quali sono disposti gli aerei riceventi.

È evidente che se vi sono connessi due o più aerei dirigibili del tipo triangolare od analogo disposti secondo diverse direzioni azimutali ed i cui estremi siano collegati a questo avvolgimento continuo, i flussi magnetici dovuti alle correnti oscillanti raccolte dagli aerei avendo direzione, valore e fase diversa fra loro, si comporranno nell'interno del disco per dar luogo a dei flussi risultanti, orientati secondo particolari direzioni diametrali.

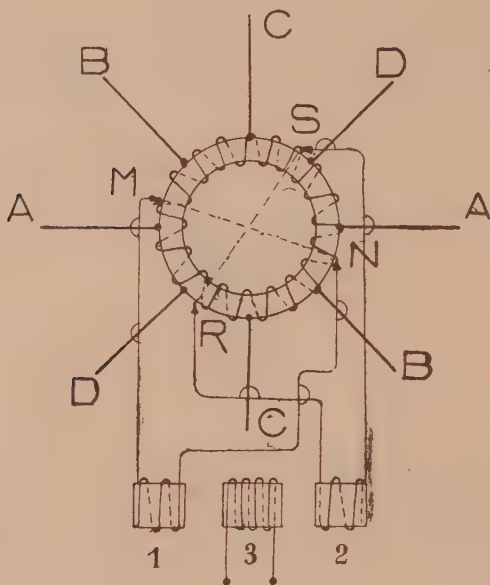


FIG. 3.

L'orientazione secondo la quale si disporranno questi flussi risultanti potrà rilevarsi facendo scorrere dei contatti metallici dentro ad una scanalatura concentrica al disco allo scopo di effettuare le comunicazioni elettriche colla spirale continua in posizioni variabili.

La direzione di un flusso risultante sarà indicata dalla posizione di quei punti opposti diametralmente per i quali la differenza di potenziale è massima, per i quali cioè è massima la corrente che da un circuito congiunto ai contatti mobili si può ricavare.

È stato dimostrato sperimentalmente e teoricamente che se si considerano due o più aerei dirigibili triangolari od analoghi collegati col toro e disposti in direzioni uniformemente distribuiti attorno all'asse verticale le

direzioni di questi piani diametrali le quali si possono individuare sulla spirale continua coincidono colla direzione da cui proviene il segnale <sup>(1)</sup>.

E così si individuerà quindi con esattezza, la direzione da cui provengono i segnali che si desidera raccogliere, e quella direzione oppure quelle direzioni dalle quali provengono i segnali disturbatori od intrusi.

Queste condizioni sperimentali corrispondono al caso pratico più generale che è quello per cui le correnti disturbatrici non provengono dalla stessa direzione, non hanno la stessa ampiezza e la stessa fase delle correnti che si desidera utilizzare per raccogliere le comunicazioni volute.

Si avrà così, per conseguenza, una prima ed efficace selezione dei segnali basata sull'impiego della dirigibilità, della sintonia e della composizione vettoriale dei flussi dovuti alle correnti di ricezione. Questa selezione si rende manifesta perchè si troveranno, movendo i contatti mobili sulla spirale torica, un piano diametrale, per esempio MN (fig. 3) pel quale si riceveranno in prevalenza le correnti che si desidera raccogliere e che si distingueranno anche per i segni convenzionali contenuti nella comunicazione che si ascolta.

Si ritroveranno inoltre, spostando una seconda coppia di contatti mobili sulla spirale torica, un piano diametrale, per esempio R S, od anche altri piani diametrali secondo i quali si riceveranno con maggiore intensità le correnti disturbatrici.

Ma tale selezione può non essere completa: essa però può essere perfezionata grandemente introducendo le correnti ricavabili dall'apparato sopra-descritto per effettuare la composizione dei flussi delle correnti di ricezione, nell'apparato che realizza il metodo differenziale, come mostra la fig. 3.

Questo apparato differenziale è stato descritto nelle mie precedenti Note (3). Esso è costituito dai rocchetti 1 e 2 disposti sovra un nucleo isolante, spostabili e che portano due solenoidi di uguale oppure non ugual numero di spire, ma avvolti in senso contrario, e da un terzo avvolgimento 3 che riceve per induzione le correnti circolanti negli avvolgimenti 1 e 2.

Il rocchetto contrale 3 ha i suoi capi riuniti col circuito contenente il detector, ossia il rivelatore a gaz ionizzato od a cristalli, collegato col telefono. Questo circuito sarà pure sintonizzato colla lunghezza delle onde che si vuol ricevere.

Nel metodo che forma oggetto della presente Nota, gli estremi dell'avvolgimento 1 (fig. 3) dovranno essere collegati coi contatti mobili scorrenti sulla spirale torica e spostabili fino a ritrovare la posizione diametrale per la quale si raccolgono con maggiore intensità le comunicazioni che si desidera di ricevere.

Il rocchetto 2 è invece collegato coi contatti mobili destinati a ricevere le correnti perturbatrici.

(1) Attestato di privativa 11 aprile 1907.



Il modo di funzionare dell'apparato differenziale è chiaro.

Avvicinato, ad esempio, il rocchetto 1 al rocchetto 3, il circuito ricevitore sarà influenzato in prevalenza dalle correnti provenienti dalla stazione colla quale si desidera ricevere. Ma commiste a questa ricezione vi saranno pure, sebbene più deboli in intensità, le correnti disturbatrici.

Facendo allora agire il rocchetto 2 si indurranno nel rocchetto 3 delle forze elettromotrici dovute in prevalenza alle correnti disturbatrici, ma però dirette in senso contrario a quelle esistenti nel rocchetto 3 per l'induzione dovuta al rocchetto 1. Regolando le posizioni dei rocchetti 1 e 2 rispettivamente al rocchetto 3, si giunge — come l'esperienza ha pienamente provato — a sopprimere praticamente le correnti disturbatrici ed a ricevere invece nettamente le correnti che provengono dalla stazione colla quale si desidera comunicare.

Praticamente il rocchetto 3 è costituito da un maggior numero di spire che non i rocchetti 1 e 2, e questi ultimi sono calzati sopra di esso e completamente lo circondano per meglio assicurare il concatenamento delle linee di forza magnetica.

Nella fig. 2 sono indicati, come semplice esempio di forma costruttiva, gli apparati che possono servire alla attuazione del metodo. Ma tali apparati possono assumere forme pratiche molto diverse ed anche tali da far conseguire notevoli miglioramenti ai risultati sperimentali.

Se si considera ancora che i principi fisici sui quali si basa il metodo esposto sono di carattere generale e che in base a questi principi è possibile immaginare una grande quantità di perfezionamenti suggeriti da criteri teorici e sperimentali, è lecito ritenere che nel metodo esposto si abbia una soluzione completa della questione della eliminazione dei disturbi nelle comunicazioni radiotelegrafiche e radiotelefoniche.

Fisica. — *Sulla depolarizzazione della luce* <sup>(1)</sup>. Nota del prof. ERNESTO DRAGO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

I. Si ammette che la luce naturale sia dovuta a vibrazioni che si possono considerare come risultanti di due componenti *incoerenti* <sup>(2)</sup> polarizzate ad angolo retto e della stessa ampiezza, le quali non possono interferire perchè le loro fasi non sono eguali in ciascun istante, o almeno fra esse non si presenta una differenza di fase costante.

Nel caso di raggi polarizzati rettilineamente, che sostituiscano un raggio di luce naturale, essi hanno ampiezze continuamente variabili ed in gene-

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania diretto dal prof. G. P. Grimaldi.

<sup>(2)</sup> Drude, *Précis d'optique*, Gauthier-Villars, Paris, 1911, tomo I, nota a pag. 194 e pag. 200 e tomo II, 1912, pag. 148.

rale ineguali a ciascun istante, ma i valori medî dei quadrati di tali ampiezze (intensità luminose) sono sempre eguali. Ed è perciò necessario osservare in proposito che sarebbe inesatto affermare, come in generale accade, che un raggio di luce naturale sia costituito da due raggi polarizzati ad angolo retto, perchè due tali raggi potrebbero essere costituiti da un solo raggio polarizzato rettilineamente sempre nel medesimo piano (<sup>1</sup>).

Sono note d'altra parte le condizioni alle quali devono soddisfare una serie di vibrazioni luminose successive in generale ellittiche per presentare all'osservazione i caratteri della luce naturale. Prima di tutto è necessario, come già si è detto, che le intensità *medie* delle due vibrazioni rettangolari componenti siano sempre eguali, poichè un fascio di luce naturale, indipendentemente dalla diminuzione di energia a causa della riflessione, dà in un cristallo birifrangente due fasci di raggi rifratti d'eguale intensità *media*.

Per una vibrazione, in particolare, le proiezioni su due assi rettangolari sono della forma

$$\begin{cases} x = a \sin(\omega t + \alpha) \\ y = b \sin(\omega t + \beta) \end{cases}$$

ove le lettere hanno i significati conosciuti (<sup>2</sup>). Se si considera una serie di vibrazioni dello stesso periodo, la media *M* delle intensità delle medesime durante un tempo brevissimo in valore assoluto, ma grandissimo relativamente al periodo, deve essere la stessa per le due componenti affinchè si abbia luce naturale e cioè:

$$M(a^2) = M(b^2),$$

e questa condizione deve essere indipendente dagli assi rettangolari predetti quando si verifica la nuova condizione:

$$M[a \cdot b \cos(\alpha - \beta)] = 0.$$

Infine, poichè i fasci luminosi  $M(a^2)$  ed  $M(b^2)$ , polarizzati ad angolo retto non devono interferire quando vengono ricondotti nel medesimo piano di polarizzazione, si deve avere la terza condizione:

$$M[a \cdot b \sin(\alpha - \beta)] = 0.$$

Vi sono anche infiniti modi di concepire un sistema di vibrazioni successive che producono luce naturale, così nella maniera più semplice due vibrazioni rettilinee polarizzate ad angolo retto possono dare luce naturale quando le loro intensità sono in ragione inversa delle loro rispettive durate, ed analogamente due vibrazioni ellittiche possono dare anche luce naturale

(<sup>1</sup>) Chwolson, *Traité de physique*, 2<sup>a</sup> ediz., tomo II, 4, pag. 696.

(<sup>2</sup>) Mascart, *Traité d'optique*, tomo I, 1889, pag. 541 seg.

quando sono *contrariamente polarizzate*, e risulta pure in questo caso che le loro intensità devono essere in ragione inversa delle loro rispettive durate.

Un insieme qualunque di coppie di vibrazioni *coniugate* <sup>(1)</sup> riproduce anche luce naturale, ma non è certamente necessario che le vibrazioni siano così aggruppate per coppie.

Se le vibrazioni fossero tutte rettilinee, si potrebbe supporre che si abbia sempre  $\alpha - \beta = 0$ , e le condizioni riferite si ridurrebbero allora ad

$$M(a^2) = M(b^2)$$

$$M(ab) = 0.$$

A questa combinazione si riattacca un'esperienza con la quale Dove mostra che se si fa rotare rapidamente un nicol polarizzatore illuminato da luce naturale; il fascio di luce emergente non presenta traccia di polarizzazione. Ma in proposito Airy fa notare che dal punto di vista di una teoria rigorosa l'esperienza di Dove è piuttosto un'imitazione che una riproduzione esatta della luce naturale, e conclude dalla discussione fatta in proposito che ogni raggio luminoso uscente dal polarizzatore anzidetto e creduto depolarizzato, è piuttosto dovuto ad una combinazione di due raggi polarizzati circolarmente in senso contrario e di lunghezza d'onda diversa, il periodo di rotazione del polarizzatore essendo troppo grande per rapporto al periodo delle vibrazioni luminose considerate, perchè questa specie particolare di dispersione sia facilmente apprezzabile. È noto anzi come Righi sia pervenuto a produrre un fenomeno analogo ai battimenti sonori mediante un tale raggio <sup>(2)</sup>.

Ulteriori ricerche relative alla depolarizzazione della luce furono tentate da Provostaye e Desain <sup>(3)</sup>, i quali nella Memoria sulla diffusione del calore riferiscono che facendo cadere normalmente ad una lamina coperta di cerussa o di zolfo bagnato un fascio di luce completamente polarizzato in un azimut qualunque, si trovano solo delle debolissime quantità di luce polarizzate nei raggi diffusi sotto gli angoli di 30° e 70°, e per conseguenza si può ammettere che con tali sostanze la depolarizzazione della luce avvenga in maniera completa o quasi completa in tutti i casi.

Umow <sup>(4)</sup>, ricordando queste esperienze, asserisce che deve essere possibile una depolarizzazione cromatica della luce per diffusione, e discutendo ampiamente sulle proprietà dei corpi neri, bianchi e colorati crede di poter concludere che un corpo nero deve diffondere la luce naturale polarizzandola e la luce polarizzata senza depolarizzarla, mentre al contrario un corpo bianco deve depolarizzare la luce diffondendola, ed un corpo colorato si

<sup>(1)</sup> Mascart, loc. cit, pag. 213 e pag. 544.

<sup>(2)</sup> Cwolson, loc. cit., pag. 908.

<sup>(3)</sup> Ann. de Ch. et phys. (3), 34, 1852, pag. 220.

<sup>(4)</sup> Physikalische Zeitschrift, 1905, pag. 674.

deve comportare come un corpo nero rispetto alle radiazioni che assorbe e come un corpo bianco rispetto a quelle che riflette. Per lo scopo di verificare sperimentalmente quanto afferma, egli istituisce delle ricerche proiettando sulla superficie piana e matta delle diverse sostanze cimentate l'immagine del filamento incandescente di una lampada Nernst, e ponendo sul cammino dei raggi un nicol polarizzatore ed un prisma a visione diretta. In tal modo sulla superficie anzidetta si ottiene uno spettro la cui luce diffusa può attraversare<sup>(1)</sup> una pila di vetri ed un polariscopio di Savart, in modo che si osserva quali raggi colorati sono in tutto o in parte depolarizzati. Però, mentre la spiegazione di Umow relativa al fenomeno di depolarizzazione per diffusione non sembra abbastanza convincente, d'altra parte il metodo di ricerca non può essere certamente abbastanza sensibile, data la debolissima intensità che devono avere i colori dello spettro formato dalla luce della lampada Nernst, per cui forse non potrebbero mettersi in evidenza le frangie con il polariscopio di Savart quando queste si fossero formate.

Ulteriormente ancora Liesegang<sup>(2)</sup> afferma di riuscire a depolarizzare la luce nella maniera seguente.

Un fascio di luce polarizzata rettilineamente viene scomposto in due fasci di eguale intensità (uno riflesso, l'altro rifratto) per mezzo di una pila di vetri, che disposta a  $45^\circ$  sulla direzione del fascio predetto, lascia prendere al fascio riflesso un cammino parallelo a quello del raggio incidente mediante due specchi piani opportunamente disposti; e quindi passa senza alcuna perdita attraverso una seconda pila di vetri disposta sotto l'angolo di polarizzazione. Il fascio rifratto invece per mezzo di un terzo specchio piano va a riflettersi totalmente su di una faccia della seconda pila predetta, ed in tal maniera un analizzatore riceve due fasci di luce polarizzati in piani ortogonali e di eguale intensità media, i quali perciò si comportano componendosi come luce naturale.

Come si vede la presente depolarizzazione si ottiene con tre specchi piani e due pile di vetri, ma l'autore non dice se fa le esperienze con luce monocromatica e non adopera il polariscopio di Savart, ma un nicol analizzatore per esaminare se la luce è depolarizzata; per la qual cosa non si può giudicare fino a qual limite ed in che maniera la luce venga depolarizzata.

II. Le mie esperienze sulla depolarizzazione della luce mediante lamine di mica  $\frac{\lambda}{4}$  furono iniziate in occasione di alcune ricerche di elettroottica, e

(<sup>1</sup>) Un metodo spesso impiegato per determinare la percentuale della luce polarizzata consiste appunto nel compensarla completamente attraverso una pila di vetri opportunamente orientata. Vedi Wood, *Optique physique*, vol. I, 1913, pag. 360 e vol. II, 1914, pag. 22.

(<sup>2</sup>) Physik. Zeitschr., 1912, pag. 1055.



ne esposi i risultati preliminari al Congresso di Fisica che ebbe luogo a Roma <sup>(1)</sup> nello scorso marzo. Tali esperienze sono state ora continuate nel modo seguente. Un fascio di luce solare penetra in una camera oscura mediante un portalucente, passa attraverso una pila di tre vetri colorati in rosso <sup>(2)</sup>, poi attraverso un foro circolare di 9 mm. praticato in uno schermo di cartone nero matto, collocato a 27 cm. di distanza dal coperchio forato del portalucente. Il fascio di luce rossa, dopo avere attraversato quindi un nicol polarizzatore, situato a 13 cm. di distanza dal detto schermo ed avente il piano di vibrazione <sup>(3)</sup> disposto a 45° rispetto al piano dell'orizzonte; investe ancora la parte centrale di una lente biconvessa di 22 cm. di distanza focale, opportunamente diaframmata e collocata ad 80 cm. di distanza dal nicol. Così emergendo dalla lente, ed a 44 cm. di distanza dalla medesima, il fascio cade sopra una lamina di mica  $\frac{\lambda}{4}$  <sup>(4)</sup> disposta verticalmente ed orientata nel suo piano in maniera che i suoi piani di vibrazione formino angoli di 45° con il piano di vibrazione della luce incidente. Il fascio di luce riflessa dalla lamina passa quindi attraverso la parte centrale di una seconda lente biconvessa di 22 cm. di distanza focale, anche essa convenientemente diaframmata, e può essere osservato mediante un nicol analizzatore ed una seconda mica  $\frac{\lambda}{4}$  (tabella <sup>(5)</sup> di E. Mach), o meglio ancora con un polariscopio di Savart che, come è noto, può svelare quasi 1 % di luce polarizzata. La prima lamina di mica circolare e di cm. 3,5 di diametro è collocata in un piccolo telaio d'ottone annerito che può essere posto in rotazione attorno ad un asse orizzontale lavorato in un sostegno metallico, convenientemente adattato nel centro di una bussola d'inclinazione nel posto dove ordinariamente sta sospeso l'ago magnetico. Dopo aver livellato tale apparecchio ed esaurito tutte le prove preliminari per avere i fasci incidente e riflesso nel piano orizzontale, si osserva il fascio riflesso dalla parte centrale della lamina di mica e si trova, che facendo variare l'angolo d'incidenza, tale fascio in generale è parzialmente polarizzato rettilineamente, ma la parte di luce polarizzata va gradatamente diminuendo con l'angolo d'incidenza

(1) Nuovo Cimento, marzo-aprile 1916, pag. VI.

(2) Tre vetri mi bastarono per diminuire i fenomeni di abbagliamento. Furono esaminati allo spettroscopio e scelti in maniera tale che lasciassero passare soltanto i raggi rossi.

(3) A proposito della confusione che suole farsi tra piano di vibrazione e piano di polarizzazione, vedi Wood, loc. cit., vol. I, pag. 851.

(4) La lamina di mica fu scelta tra quelle che esistono nel Gabinetto di Fisica del Liceo Spedalieri di Catania. Il medio spessore di essa, misurato accuratamente con lo sferometro di Perrin, è di mm. 0,036.

(5) Chwolson, loc. cit., pag. 906.

finchè questo non abbia raggiunto un valore di  $8^\circ$  o meno, nel quale caso la luce è completamente depolarizzata, perchè non si osservano in nessun modo le frangie nel polariscopio. Facendo allora rotare la lamina di mica nel suo piano verticale, si trova che la *depolarizzazione massima ha luogo soltanto quattro volte in una rotazione completa*, e cioè quando, come già si è detto, i piani di vibrazione della lamina formano angolo di  $45^\circ$  con il piano di vibrazione della luce incidente, mentre negli altri casi si ha luce parzialmente polarizzata rettilineamente, e la parte polarizzata diviene massima quando l'uno o l'altro dei piani di vibrazione della luce nella mica coincide con il piano di vibrazione della luce incidente.

Io credo che del fenomeno descritto possa darsi spiegazione analoga a quella che si dà degli anelli di Newton.

Infatti, quando si fa cadere sopra una lamina di mica  $\frac{\lambda}{4}$  un fascio di luce polarizzata rettilineamente con il piano di vibrazione a  $45^\circ$  sui piani di vibrazione della luce nella lamina, esso si scinde in due fasci, di cui uno si riflette sulla faccia stessa d'entrata della lamina, l'altro invece attraversando la medesima si polarizza circolarmente; e mentre una parte di esso viene trasmessa ed assorbita da un dischetto di carta nera matta posto dietro la lamina, un'altra parte riflettendosi sulla pagina interna della faccia d'uscita ritorna ad emergere dall'anzidetta faccia d'entrata. Ma poichè ciascuna vibrazione di quest'ultima parte di luce ha così subito quasi <sup>(1)</sup> una differenza di cammino  $\frac{\lambda}{2}$  rispetto a ciascuna vibrazione di ogni raggio del primo fascio luminoso riflesso, essa risulta costituita da luce polarizzata rettilineamente, ma con il piano di vibrazione a  $90^\circ$  rispetto al piano di vibrazione della luce riflessa soltanto dalla faccia d'entrata della lamina. Essendo intanto la sorgente luminosa abbastanza estesa, i fasci anzidetti di luce sono *incoerenti* <sup>(2)</sup>, e d'altra parte poichè il potere riflettente varia con l'angolo d'incidenza, è facile comprendere come a partire da un determinato valore di tale angolo i due fasci *incoerenti*, polarizzati in piani ortogonali, possano conseguire la stessa intensità *media*, ed in tal modo restino verificate tutte le condizioni, perchè essi si comportino insieme come luce naturale.

III. Esperienze analoghe a quelle già descritte sono state anche fatte per vedere se sia possibile ottenere, mediante la stessa lamina di mica, una depolarizzazione della luce polarizzata circolarmente.

Per tale scopo di seguito al nicol polarizzatore è disposta con ogni cura una lamina di mica  $\frac{\lambda}{4}$  con l'asse verticale, in maniera che la luce rossa da

(1) Rigorosamente si avrebbe una differenza esatta  $\frac{\lambda}{2}$  per l'incidenza normale.

(2) Vedi Drude, loc. cit., tomo I, pag. 211, n. 17.

essa emergente sia polarizzata circolarmente. Analizzando quindi nella maniera già descritta la luce riflessa dalla lamina depolarizzatrice, si constata che quando l'angolo d'incidenza di essa è di circa  $8^\circ$  o meno, come precedentemente, la luce è quasi completamente depolarizzata, poichè le frangie o non si osservano, o in certe posizioni si vedono debolmente movendo il polariscopio avanti l'occhio. Però a differenza del caso precedente, in cui la luce incidente è polarizzata rettilineamente, *la depolarizzazione della luce polarizzata circolarmente ha luogo sempre comunque si faccia girare la lamina di mica nel suo piano verticale.*

Del modo, come avviene ora, la depolarizzazione di luce polarizzata circolarmente si può dare la seguente spiegazione. Il fascio incidente al solito si decompone in due nuovi fasci di cui uno viene riflesso dalla faccia d'entrata della lamina, mentre l'altro viene in parte trasmesso ed in parte riflesso dalla pagina interna della faccia d'uscita. Quest'ultima parte di luce riflessa, ritornando ad attraversare nuovamente la lamina emerge polarizzata circolarmente dalla suddetta faccia d'entrata, ma le sue vibrazioni hanno senso contrario a quelle che costituiscono la luce soltanto riflessa dalla faccia d'entrata della lamina. Ciò succede sempre <sup>(1)</sup> comunque si faccia rotare la lamina di mica depolarizzatrice nel suo piano verticale. E quindi nei raggi di luce totalmente rinvii dalla predetta lamina si hanno vibrazioni circolari di senso contrario e di egual periodo che componendosi dovrebbero dare vibrazioni risultanti rettilinee. Ma poichè tali raggi sono *incoerenti*, la differenza di fase tra di essi è variabile e cambia perciò continuamente l'azimut del movimento rettilineo risultante in maniera che la luce appare depolarizzata <sup>(2)</sup>.

Per ragioni facili a comprendersi è ovvio avvertire intanto che la realizzazione di questa esperienza richiede la massima cura, ogni piccolo spostamento accidentale di qualsiasi parte dell'apparecchio dando luogo ad osservazione di frangie nel polariscopio. Così pure l'asse orizzontale attorno al quale ruota la mica depolarizzatrice deve essere lavorato con precisione e disposto in maniera che la rotazione della lamina avvenga sempre nel medesimo piano verticale.

IV. Resta ancora a vedere se può aver luogo una depolarizzazione della luce polarizzata ellitticamente. E perciò di seguito al solito nicol polarizzatore si dispone una lamina di mica  $\frac{\lambda}{4}$ , il cui asse forma un angolo di circa  $20^\circ$  con il piano di vibrazione della luce nel nicol. Osservando in tal modo come precedentemente la luce riflessa dalla lamina di mica depola-

(<sup>1</sup>) Cwolson, loc. cit., pag. 905.

(<sup>2</sup>) Vedi in proposito: Bouasse, *Cours de physique*, quatrième partie: *Optique*, pag. 266 e seg. (Interférences des circulaires).

rizzatrice, si vede che essa risulta quasi completamente depolarizzata soltanto quando gli assi delle due lamine (*polarizzatrice e depolarizzatrice*) sono pressochè paralleli o perpendicolari e l'angolo d'incidenza ha il valore già riferito negli altri casi.

Facendo poi rotare la lamina di mica depolarizzatrice nel suo piano, nelle altre posizioni si osserva luce parzialmente polarizzata ellitticamente.

Del fenomeno può darsi la seguente spiegazione.

Il fascio di luce incidente polarizzato ellitticamente, cadendo sulla lamina di mica si scinde in due nuovi fasci, di cui uno si riflette in parte nella solita maniera sulla faccia d'entrata della lamina, i semiassi dell'ellisse essendo eguali alle ampiezze delle due vibrazioni rettilinee ortogonali che danno luogo alla vibrazione ellittica, perchè la lamina di mica ha lo spessore  $\frac{\lambda}{4}$ ; l'altro fascio invece attraversa la lamina e giungendo sulla pa-

gina interna della faccia d'uscita in parte si riflette e ritorna ad attraversare la lamina. in parte esce e viene assorbito dalla carta nera posta dietro la lamina stessa. La parte anzidetta di luce che si riflette sulla pagina interna della faccia d'uscita riesce polarizzata rettilineamente soltanto quando i due azimut della lamina depolarizzatrice hanno le stesse direzioni di quelli della lamina polarizzatrice<sup>(1)</sup>, ed allora ritornando ad attraversare la la-

mina  $\frac{\lambda}{4}$  viene di nuovo polarizzata ellitticamente; ma le vibrazioni ellittiche dei suoi raggi sono di senso contrario a quelle che costituiscono la luce già riflessa dalla faccia d'entrata della lamina<sup>(2)</sup>. Per il valore dell'angolo d'incidenza non superiore ad 8° circa emergono quindi da quest'ultima faccia due fasci di raggi luminosi con eguali intensità medie e le cui vibrazioni ellittiche eguali, di senso contrario e ad assi paralleli sono perciò *contrariamente polarizzate* e si compongono in maniera da costituire luce naturale<sup>(3)</sup>.

Si comprende chiaramente che se i due azimut delle lamine di mica predette invece non hanno le stesse direzioni, non è possibile ottenere le due vibrazioni *contrariamente polarizzate*, e perciò la luce rinviata dalla lamina depolarizzatrice è parzialmente polarizzata ellitticamente.

V. Da tutto quanto ho esposto appare evidentemente che il fenomeno della depolarizzazione della luce non deve essere soltanto presentato dalla mica, ma da qualunque lamina  $\frac{\lambda}{4}$  di sostanza birifrangente e che d'altra parte si devono avere risultati identici a quelli ottenuti adoperando lamine

(<sup>1</sup>) Cwolson, loc. cit., pag. 905.

(<sup>2</sup>) Con considerazioni elementari è facile convincersi che non alterano assolutamente i risultati di tutte le mie ricerche l'eventuale cambiamento di fase nella riflessione della luce ed il ritorno dei raggi. Vedi Mascart, loc. cit., pag. 244, n. 177.

(<sup>3</sup>) Mascart, loc. cit., pag. 236, n. 173; pp. 544 e 546, nn. 328 e 330.



di un numero dispari qualunque di quarti d'onda, mentre non si deve avere depolarizzazione con lamine di spessore diverso. Ciò mi vien confermato da esperienze fatte rispettivamente con due lamine di mica, di cui una ha lo spessore di  $\frac{19}{4}\lambda$ , mentre l'altra ha lo spessore superiore a  $\frac{\lambda}{4}$  (0.055 mm.). La prima soltanto depolarizza la luce <sup>(1)</sup>.

I risultati delle mie ricerche danno conferma sperimentale della possibilità di depolarizzare la luce dovuta a vibrazioni di forma qualsiasi, esse saranno continuate appena potranno esser messi a mia disposizione nuovi mezzi di investigazione <sup>(2)</sup>.

Geofisica. — *Rilevamenti di anomalie magnetiche nei dintorni di Roma. I: Osservazioni lungo la via Appia antica.* Nota di A. PALAGI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. — È noto che le regioni di costituzione vulcanica, che in Italia sono pur così numerose e vaste, presentano anomalie tanto complesse dal punto di vista del loro studio magnetico, da renderne spesso assai difficile o addirittura impossibile la rappresentazione grafica per curve isoanomale, soprattutto a causa della loro estrema variabilità e capricciosità. Studi teorici sviluppati di recente, specialmente dal Piltchikoff <sup>(3)</sup>, dal Passalsky <sup>(4)</sup> e dal Carlheim-Gyllensköld <sup>(5)</sup> hanno infatti chiarito che in regioni fortemente anomale, come, p. es., quelle di Kursk e di Kriwoi-Rog in Russia, le variazioni nel tempo del vettore risultante dal campo terrestre normale e da quello anomalo possono assumere valori e forme nel loro andamento affatto diversi da quelli normali, e fortemente diversi tra loro per punti posti anche molto vicini. Inoltre le zone vulcaniche italiane hanno questo carattere, di presentarsi senza contorni netti, e diffuse in altri terreni quasi mai normali dal punto di vista magnetico; onde un rilevamento eseguito tutto all'intorno o non è possibile, o non ci dà indicazioni sufficienti per stabilire l'entità

<sup>(1)</sup> Furono eseguite anche esperienze con raggi luminosi di altri colori, i quali si ottenevano proiettando le diverse parti dello spettro solare sul foro dello schermo in maniera che nel nicol polarizzatore entrasse un fascio di luce monocromatica. Si osservava allora depolarizzazione completa con i raggi rossi. Come era da aspettarsi, anche esperienze fatte con luce bianca mostrarono un'imperfetta depolarizzazione.

<sup>(2)</sup> Un apparecchio per depolarizzare la luce sarà fatto costruire da me con ogni precisione quando sarà possibile trovare un tecnico disposto ad assumerne la costruzione, ciò che per il momento non è facile.

<sup>(3)</sup> M. N. Piltchikoff, *Sur les variations périodiques des éléments du magnétisme terrestre dans les régions anormales* (Congrès intern. de Météorol. à Paris, sept. 1900).

<sup>(4)</sup> P. T. Passalsky, *Sur l'étude de la distribution du magnétisme à la surface du globe terrestre* (Boll. Università imp. di Odessa, B. Weinberg, 1901, pp. 1-547).

<sup>(5)</sup> O. Carlheim-Gyllensköld, *De l'influence des minerais de fer dans l'écorce terrestre sur les perturbations magnétiques*, (Arkiv för Matematik, etc., Svenska Vetenskapsakademien, Bd. 11, 1916).

ed il carattere delle anomalie che trovansi nel loro ambito; mentre le serie di misure eseguite nel loro interno, o richiedono un tempo enorme se condotte minuziosamente, ovvero non hanno senso se prese in punti distanziati e slegati tra loro <sup>(1)</sup>. Soltanto in alcuni speciali casi di anomalie di poca entità, si è potuto arrivare al tracciamento delle cartine corrispondenti, come, p. es., pei dintorni di Torino e Sestola <sup>(2)</sup>. Per l'Agro Romano tuttavia risulta dagli studi del Keller e del Folgheraiter che le anomalie più forti sono prodotte solo da alcune specie di rocce eruttive, quali la lava, la pozzolana ed il tufo litoide; e che ad ogni modo l'influenza loro all'esterno va decrescendo molto rapidamente con la distanza e con l'altezza al di sopra del suolo; talchè, anche secondo la teoria, le variazioni nel tempo del vettore magnetico risultante non vi dovrebbero essere in generale tanto anomale, come nelle suddette località della Russia (ove esse sono bene spiegabili per la presenza nel sottosuolo di potenti giacimenti ferriferi); e quindi non dovrebbero opporre molto ostacolo ad un rilevamento che fosse tentato con altrettanta pazienza quanta ne impiegò il Passalsky intorno a Kriwoi-Rog, ovvero seguendo i criteri già esposti dal Palazzo, p. es., per le anomalie di Viterbo, Castel del Piano, Cori, Melfi ecc. <sup>(3)</sup>, ed adottando poi metodi e mezzi variamente opportuni a seconda del genere delle anomalie stesse.

2. — Nell'intento precisamente di vedere fino a quale grado di minuziosità si avrebbe a spingere uno studio di questo genere per la regione Laziale, nell'inverno 1916 volli intraprendere una duplice serie di misure della intensità magnetica orizzontale in quei terreni dei dintorni di Roma, che sono da considerare gli uni tra i più, e gli altri tra i meno anomali, scegliendo (dopo un opportuno esame della modernissima carta geologica di Roma del Ten. gen. Verri, e della Guida itineraria delle principali rocce magnetiche laziali del Keller) tra i primi, quelli della zona della via Appia antica che sono intorno a Capo di Bove (tra il II ed il IV Km. della via stessa); e tra i secondi, quelli a NW di Roma, alla destra del Tevere intorno alla collina della Farnesina e della villa Crescimbene, già scelti da altri come stazioni normali per Roma. Dalla cortesia del direttore del R. Ufficio Meteorologico di Roma, prof. L. Palazzo, ebbi a disposizione per le mie misure alcuni magnetometri da campo, tra cui scelsi ed usai essenzialmente il variometro

(1) Un'idea delle difficoltà che presentano lavori siffatti, si può ricavare dagli studi seguenti: F. Keller e G. Folgheraiter, *Frammenti concernenti la Geofisica dei pressi di Roma* (Roma, 1895-1904); L. Palazzo, *Carte magnétique de la Sicilie* (Terr. Magn., June 1889, pag. 87); Oddone e Franchi, *Sul magnetismo di monte* (Ann. Uff. Centr. Meteor. e Geod., vol. XII, 1890, parte 1<sup>a</sup>, pag. 135, Roma, 1893).

(2) D. Boddaert, *Misure magnetiche nei dintorni di Torino* (Mem. R. Acc. Scienze di Torino, 1906-07 e 1909); D. Pacini, *Sulla variazione locale di H nei dintorni di Sestola (Modena)* (Ann. Uff. Centr. Met., vol. XXX, parte 1<sup>a</sup>, 1908).

(3) L. Palazzo, *Misure magnetiche eseguite in Italia nel 1891 e contribuzioni allo studio delle anomalie nei terreni vulcanici* (Rend. Acc. Lincei, 2° sem., 1899, pag. 22).

Kohlrausch a 4 magneti deviatori (già usato dal Pacini a Sestola) ed il magnetometro da viaggio del Palazzo stesso.

L'uno <sup>(1)</sup>, fondato come è noto, sul principio *delle deviazioni*, permette di avere le variazioni relative di H assai rapidamente da punto a punto, con l'applicazione della formola semplificata:

$$\frac{H_2 - H_1}{H_1} = \frac{\text{tg } \varphi}{4A} (n_2 - n_1) + a(t_1 - t_2),$$

ove  $n_2 - n_1$  = differenza di lettura in parti di scala fornita dall'apparecchio nelle due località corrispondenti ai valori  $H_2$  ed  $H_1$  dell'intensità orizzontale;  $\frac{\text{tg } \varphi}{4A}$  = coefficiente costante di riduzione:  $t_2$  e  $t_1$  = temperature dei magneti deflettenti nelle relative misure; ed  $a$  = coefficiente termico dell'apparecchio. L'altro poi <sup>(2)</sup>, fondato sul principio *delle oscillazioni*, permette di avere le variazioni relative di H con la massima precisione, nelle stazioni ove le misure possano essere fatte con tutta tranquillità, applicando l'altra formola:

$$\frac{H_2}{H_1} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^2 \left\{ 1 + (a + 2\alpha) (t_2 - t_1) \right\}.$$

ove  $T_2$  e  $T_1$  = durate d'oscillazione del magnete collimatore nelle due località corrispondenti ad  $H_2$  ed  $H_1$ ;  $t_2$  e  $t_1$  sono le relative temperature del magnete;  $a$  il coefficiente termico del magnete stesso ed  $\alpha$  è il coefficiente di dilatazione termica dell'acciaio = 0,000012.

Con opportune misure preliminari eseguite di notte nel R. Ufficio Meteorologico, potei stabilire il valore dei coefficienti termici dei due apparecchi; essi mi risultarono rispettivamente eguali a 0,000724 e 0,00046. Mi portai quindi sulla via Appia antica e sulla Farnesina avendo ben cura di fissare i punti di osservazione in modo da poterli ritrovare con precisione, e di usare gli strumenti sempre allo stesso modo, cioè sullo stesso treppiede, e sempre all'incirca alla stessa altezza dal suolo, presa però abbastanza grande, sì da poter eliminare la maggior parte delle perturbazioni, prodotte dalle rocce più particolarmente dotate di punti distinti (altezza = m. 1,20-1,25 pel magnete rispetto al suolo). I risultati di queste mie misure saranno pubblicati per disteso, prossimamente in una Memoria degli Annali dell'Ufficio di Meteorologia; qui mi limito a riportarne le tabelle numeriche e le conclusioni principali <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> F. Kohlrausch, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. I, pag. 491 e segg.

<sup>(2)</sup> L. Palazzo, *Un piccolo magnetometro da viaggio per lo studio delle perturbazioni magnetiche locali* (Ann. Uff. centr. met., vol. XV, parte I, pag. 315. 1893).

<sup>(3)</sup> La Memoria che pubblicherò in seguito, è uno studio abbastanza completo sull'argomento, e perciò conterrà un breve resoconto di tutte le monografie ed articoli scritti finora sulle anomalie magnetiche italiane e specialmente laziali, un rapido riassunto delle teorie matematiche relative, un cenno critico sugli strumenti più atti per questo genere di studio, con particolari considerazioni sugli apparecchi da me usati, ed uno schema di classificazione dei tipi più importanti d'anomalie. Infine in due tavole verrà anche rappresentato graficamente il rilevamento delle zone della via Appia antica su cui ho fatto le misure.

TABELLA I.

Valori del rapporto  $\frac{H_2 - H_1}{H_1}$  lungo la via Appia antica, dal II al IV km. in linea mediana [Apparecchio usato: variometro del Kohlrausch; lettura diretta =  $(n' - n)$  in decimi di mm.;  $H_2$  = intensità orizzontale nel punto indicato;  $H_1$  = intensità orizzontale alla Farnesina, assunta come normale per Roma].

| N.º | $\frac{n' - n}{2}$ | $\frac{H_2 - H_1}{H_1}$ | POSIZIONE DELLE STAZIONI                                                         |
|-----|--------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | -- 13              | -- 0,0013               | A 30 m. a sud dell'orlo nord del muro che parte dal bivio Pignatelli.            |
| 2   | + 308              | + 0,0297                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                              |
| 3   | + 107              | + 0,0103                | " " " "                                                                          |
| 4   | + 20               | + 0,0019                | " " " "                                                                          |
| 5   | -- 39              | -- 0,0038               | " " " "                                                                          |
| 6   | -- 103             | -- 0,0099               | " " " "                                                                          |
| 7   | -- 240             | -- 0,0232               | Segue l'osteria n. 36.                                                           |
| 8   | -- 181             | -- 0,0127               | A 30 m. a sud del punto 6.                                                       |
| 9   | -- 62              | -- 0,0060               | A 10 m. " " precedente.                                                          |
| 10  | -- 328             | -- 0,0317               | " " " "                                                                          |
| 11  | -- 301             | -- 0,0291               | " " " "                                                                          |
| 12  | + 33               | + 0,0032                | A 40 m. a sud del braccio sud dell'ingresso al n. 37 (Vigna Ebrei).              |
| 13  | -- 103             | -- 0,0099               | A 10 m. a sud del punto precedente.                                              |
| 14  | + 16               | + 0,0015                | " " " "                                                                          |
| 15  | -- 5               | -- 0,0005               | " " " "                                                                          |
| 16  | -- 12              | -- 0,0012               | Segue villa n. 39.                                                               |
| 17  | + 98               | + 0,0095                | A 20 m. a nord del principio del selciato di S. Sebastiano.                      |
| 18  | + 142              | + 0,0137                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                              |
| 19  | + 68               | + 0,0063                | " " " "                                                                          |
| 20  | + 43               | + 0,0042                | Segue piazzale S. Sebastiano.                                                    |
| 21  | + 357              | + 0,0345                | A 10 m. a sud dell'orlo sud del selciato di S. Sebastiano                        |
| 22  | + 280              | + 0,0270                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                              |
| 23  | + 257              | + 0,0248                | " " " "                                                                          |
| 24  | + 256              | + 0,0247                | " " " "                                                                          |
| 25  | + 208              | + 0,0201                | Segue vicolo della Basilica.                                                     |
| 26  | + 137              | + 0,0132                | A 20 m. a sud dell'orlo sud del cancello della casetta rossa.                    |
| 27  | + 22               | + 0,0021                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                              |
| 28  | + 8                | + 0,0008                | A 22 m. a sud dell'orlo sud del cancello della villa Grandi.                     |
| 29  | + 13               | + 0,0013                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                              |
| 30  | + 1                | + 0,0001                | " " " "                                                                          |
| 31  | -- 7               | -- 0,0007               | " " " "                                                                          |
| 32  | -- 59              | -- 0,0057               | " " " "                                                                          |
| 33  | -- 35              | -- 0,0034               | " " " "                                                                          |
| 34  | -- 15              | -- 0,0014               | " " " "                                                                          |
| 35  | -- 91              | -- 0,0088               | " " " "                                                                          |
| 36  | -- 141             | -- 0,0136               | " " " "                                                                          |
| 37  | -- 65              | -- 0,0063               | Segue tabaccheria Costa e case.                                                  |
|     |                    |                         | A 12 m. a sud del 1º pilastro della fila che sale alla tomba di Cecilia Metella. |



(Segue TABELLA I).

| N.º | $\frac{n' - n}{2}$ | $\frac{H_2 - H_1}{H_1}$ | POSIZIONE DELLE STAZIONI                                                                           |
|-----|--------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 38  | — 110              | — 0,0106                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                                                |
| 39  | — 174              | — 0,0168                | " " " "                                                                                            |
| 40  | — 116              | — 0,0112                | " " " "                                                                                            |
| 41  | — 81               | — 0,0078                | " " " "                                                                                            |
| 42  | — 154              | — 0,0149                | " " " "                                                                                            |
| 43  | — 76               | — 0,0073                | " " " "                                                                                            |
| 44  | — 31               | — 0,0030                | " " " "                                                                                            |
| 45  | — 126              | — 0,0122                | A 20 m. a sud del punto 44.                                                                        |
| 46  | — 81               | — 0,0078                | A 10 m. " " precedente.                                                                            |
| 47  | — 129              | — 0,0125                | " " " "                                                                                            |
| 48  | — 128              | — 0,0124                | " " " "                                                                                            |
| 49  | — 186              | — 0,0180                | " " " "                                                                                            |
| 50  | — 264              | — 0,0255                | " " " "                                                                                            |
| 51  | — 79               | — 0,0076                | " " " "                                                                                            |
| 52  | — 427              | — 0,0412                | " " " "                                                                                            |
| 53  | — 155              | — 0,0150                | " " " "                                                                                            |
| 54  | — 110              | — 0,0106                | " " " "                                                                                            |
| 55  | — 107              | — 0,0103                | A m. 31,75 a sud del bordo sud della III pietra chilometrica della via.                            |
| 56  | + 255              | + 0,0246                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                                                |
| 57  | + 6                | + 0,0006                | " " " "                                                                                            |
| 58  | + 123              | + 0,0119                | " " " "                                                                                            |
| 59  | + 108              | + 0,0104                | " " " "                                                                                            |
| 60  | + 13               | + 0,0013                | " " " "                                                                                            |
| 61  | — 135              | — 0,0130                | A 30 m. a nord del palo telegrafico posto al termine del muro che viene dalla tomba di C. Metella. |
| 62  | — 50               | — 0,0048                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                                                |
| 63  | — 75               | — 0,0072                | " " " "                                                                                            |
| 64  | — 142              | — 0,0137                | A 40 m. a nord del bordo nord del cancello della casa n. 56.                                       |
| 65  | — 85               | — 0,0082                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                                                |
| 66  | + 182              | + 0,0176                | " " " "                                                                                            |
| 67  | — 62               | — 0,0060                | " " " "                                                                                            |
| 68  | — 67               | — 0,0065                | A 90 m. a nord dell'orlo nord del rudero con la lapide Secchi.                                     |
| 69  | — 38               | — 0,0037                | A 10 m a sud del punto precedente.                                                                 |
| 70  | — 74               | — 0,0072                | " " " "                                                                                            |
| 71  | — 100              | — 0,0097                | " " " "                                                                                            |
| 72  | 54                 | — 0,0052                | " " " "                                                                                            |
| 73  | + 119              | + 0,0115                | " " " "                                                                                            |
| 74  | — 149              | — 0,0144                | " " " "                                                                                            |
| 75  | — 36               | — 0,0035                | " " " "                                                                                            |
| 76  | — 37               | — 0,0036                | A 70 m. a sud dell'orlo nord del rudero con la lapide Secchi.                                      |
| 77  | — 52               | — 0,0050                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                                                |
| 78  | + 41               | + 0,0040                | " " " "                                                                                            |
| 79  | — 16               | — 0,0015                | " " " "                                                                                            |
| 80  | — 92               | — 0,0089                | " " " "                                                                                            |
| 81  | + 21               | + 0,0020                | " " " "                                                                                            |
| 82  | + 5                | + 0,0005                | " " " "                                                                                            |
| 83  | — 23               | — 0,0022                | A 60 m. a sud del punto n. 82.                                                                     |
| 84  | — 31               | — 0,0030                | A 15 m. a sud del punto precedente.                                                                |
| 85  | — 50               | — 0,0048                | " " " "                                                                                            |
| 86  | — 34               | — 0,0033                | " " " "                                                                                            |
| 87  | + 53               | + 0,0051                | A 40 m. a sud dell'orlo nord di finestra della casa colonica posta di fronte al pino alto.         |
| 88  | + 64               | + 0,0062                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                                                |

(Segue TABELLA I).

| N.° | $\frac{n' - n}{2}$ | $\frac{H_2 - H_1}{H_1}$ | POSIZIONE DELLE STAZIONI                                             |
|-----|--------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| 89  | + 92               | + 0,0089                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                  |
| 90  | — 14               | — 0,0014                | A 20 m. a sud del punto 89.                                          |
| 91  | + 18               | + 0,0017                | " " " precedente.                                                    |
| 92  | + 21               | + 0,0020                | " " " "                                                              |
| 93  | + 98               | + 0,0095                | " " " "                                                              |
| 94  | + 100              | + 0,0097                | A 10 m. " " "                                                        |
| 95  | — 26               | — 0,0025                | A 20 m. a sud dell'orlo sud dell'ultimo resto di casa dopo il IV Km. |
| 96  | + 80               | + 0,0073                | A 10 m. a sud del punto precedente.                                  |
| 97  | + 14               | + 0,0014                | " " " "                                                              |
| 98  | + 24               | + 0,0023                | " " " "                                                              |
| 99  | + 69               | + 0,0067                | " " " "                                                              |
| 100 | — 13               | — 0,0013                | " " " "                                                              |
| 101 | + 56               | + 0,0054                | " " " "                                                              |
| 102 | + 127              | + 0,0123                | " " " "                                                              |
| 103 | + 149              | + 0,0144                | " " " "                                                              |
| 104 | + 171              | + 0,0165                | " " " "                                                              |

3. — Dai numeri riportati si vede subito quali oscillazioni si abbiano nelle variazioni della forza  $H$ , anche quando si proceda lungo una medesima linea, che nel caso mio era la linea mediana della Appia antica, e come fosse pertanto necessario scegliere molto piccola la distanza tra due stazioni successive, per metter le oscillazioni abbastanza bene in evidenza; distanza che nel caso mio era per lo più di 10 metri. Orbene si può riscontrare che tali oscillazioni sono di un ordine di grandezza molto inferiore a quello delle oscillazioni riscontrate a Kursk ed a Kriwoi-Rog; ed anzi, sul tratto della strada di S. Sebastiano che precede immediatamente la Appia antica, osservazioni ulteriori (per brevità non riportate in tabella) mostrano che tali oscillazioni sono piccolissime; e soltanto oltrepassando la zona di cotesti tufi e depositi alluvionali e passando sulla pozzolana e sul tufo litoide che costituiscono il sostegno della Appia antica, dal II al III Km. di essa, queste oscillazioni si fanno assai più nette e caratteristiche per raggiungere il loro massimo di fronte alla testata della colata di lava che comincia poco prima della tomba di Cecilia Metella. La interpretazione più naturale di ciò mi sembra essere quella già emessa dal Rücker e dal Thorpe <sup>(1)</sup> per le analoghe osservazioni da essi fatte sul suolo vulcanico dell'alta Inghilterra, che cioè si sia qui in presenza di una serie di nette *polarità sud*; in quantochè, passando da N a S su ciascun centro di perturbazione, il rapporto  $\frac{H_2 - H_1}{H_1}$  tende,

<sup>(1)</sup> Rücker e Thorpe, *Survey of the British Isles for the epoch January 1886* (Phil. Trans. of the R. Soc. of London, 1890, vol. 181).

pur sempre oscillando, verso valori negativi sempre maggiori in valore assoluto, finchè al di là d'ogni centro risale bruscamente a valori positivi abbastanza alti, per decrescere poi rapidamente al susseguirsi di un altro centro simile, e così via <sup>(1)</sup>. Tutte queste anomalie sembrano infine comporsi insieme e raggrupparsi intorno a due centri maggiori che corrispondono all'incirca alla sommità delle due collinette di S. Sebastiano e di Cecilia Metella. Oltrepassata poi la testata della colata di lava, e procedendo verso S. lungo di essa, il suddetto rapporto va via decrescendo d'ampiezza fino a tendere a zero presso alla villa Mora (poco prima della IV colonna chilometrica), per riprendere poi con carattere affatto diverso, cioè con valori positivi sempre più crescenti fino a poco più di un centinaio di metri oltre la IV colonna chilometrica; e ciò mi pare si possa spiegare con l'ipotesi di una nuova serie di *polarità nord* sovrapposta alla magnetizzazione verticale indotta nella lava dal campo terrestre, per la quale si dovrebbe per contro avere un polo sud in alto ed uno nord in basso. Dunque poichè, malgrado l'induzione terrestre, intorno al IV Km. della via Appia antica sussiste la prevalenza netta di un valore  $H$  maggiore del normale, ciò indica, a parer mio, l'esistenza di una ulteriore distribuzione di magnetismo, quale potrebbe essere quella di un *originario magnetismo longitudinale* della lunga colata di lava; pel quale insomma essa si presenterebbe magnetizzata come una sbarra di ferro dolce, che fosse stata arroventata prima, eppoi lasciata raffreddare in una direzione prossima a quella del meridiano magnetico <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Analogo comportamento si ha poi lateralmente alla via, come ho potuto riscontrare con apposite misure, p. es. sul principio del vicolo che connette la via Appia antica con la Ardeatina prossima. È superfluo ripetere che per valore  $H_1$  era preso quello osservato sulla Farnesina, assunta come stazione di riferimento.

<sup>(2)</sup> In tale ipotesi infatti il polo nord della colata, che è lunga quasi dieci chilometri, dovrebbe trovarsi a circa  $\frac{1}{12}$  della sua lunghezza, a partire dalla sua estremità settentrionale (v. Kohlrausch und Hallock, Wied. Ann., Band XXII, 1884, s. 411). Orbene la detta successione di polarità nord verrebbe proprio a trovarsi nell'interno del IV Km. della via Appia antica, essendo la testata della colata presso al III Km.

Chimica. — *Sulla isomeria degli acidi erucico, brassidinico, isoerucico. (Risultati avuti col metodo criodratrico od eutettico) (¹).*  
Nota V di L. MASCARELLI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

L'esistenza di questi tre acidi può interpretarsi con fenomeni d'isomeria, di polimeria e di polimorfismo.

Nella Nota precedente (²) si cercava con lo studio delle curve di saturazione dei vari sistemi binarii, di portare qualche contributo in favore dei fenomeni di isomeria o di polimorfismo, poichè già il fenomeno di polimeria era stato escluso mediante la determinazione della grandezza molecolare (Note II e III). Con la Nota IV rimane però insoluta la questione della esistenza dei due acidi a legame etilenico aventi configurazione *trans* (acido brassidinico ed isoerucico).

Come già altra volta dicevamo, l'esistenza di acidi erucici in numero superiore a quello prevedibile dalla teoria ricorda molto il caso degli acidi cinnamici, che fu a lungo discusso e studiato, finchè, in base alle esperienze di Biilmann (³), parve risoluto in senso favorevole ad un fenomeno di polimorfismo. Senonchè, le ricerche più accurate e sistematiche intraprese più tardi da Stobbe e Schönburg (⁴) tornarono a risolvere la questione: anzi, se si accettano le conclusioni di questi ricercatori, fondate su larga base sperimentale, si deve ammettere che i vari acidi cinnamici finora noti costituiscono un fenomeno di isomeria, che sino al presente non si sa interpretare con le nostre formule di struttura.

Noi abbiamo voluto ripetere sugli acidi erucici le esperienze di Biilmann, ponendoci in condizioni analoghe a quelle descritte da tale autore; però non ci è riuscito mai di osservare in alcun caso la trasformazione di uno degli acidi erucico, brassidinico, isoerucico nell'altro. Ogni campione mostrò sempre inalterato il punto di fusione che aveva all'inizio delle esperienze.

Noi abbiamo anche intraprese esperienze analoghe a quelle di Stobbe e Schönburg (l. c.), ma siccome esse richieggono lungo tempo e la attuale mancanza di personale in laboratorio può ritardare di molto il compimento di queste, così vogliamo a questo proposito per ora solo rammentare che le conclusioni sicure a cui siamo giunti sono:

(¹) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Cagliari.

(²) Rendic. R. Accad. Lincei, 24, II, 91 (1915); e Gazz. ch. it., 45, II, 837 (1915).

(³) Ber. d. deut. Ch. Ges., 42, 182, 1444 (1909).

(⁴) Liebig's Annalen, 402, 187 (1914).



1°) I tre acidi: erucico, brassidinico ed isoerucico tenuti separatamente a sè per lungo tempo, mantengono invariato il loro punto di fusione (i cinnamici invece si trasformano allo stato solido e più facilmente a bassa temperatura). (Stobbe, Schönburg).

2°) Gli acidi erucici si recuperano inalterati dai solventi ordinarii, mentre questo non succede per i cinnamici (id. id.).

Sappiamo, e ciò risulta ancora dalle esperienze di Stobbe, che alcune trasformazioni di certe sostanze richiedono tempo più o meno lungo; inoltre che per alcune altre sostanze polimorfe (es. benzofenone) occorre oltrepassare una certa percentuale dell'una forma rispetto all'altra, perchè compaia il punto di fusione di quest'altra forma (Schaum e Schaeling).

Appunto dell'influenza di tutte queste condizioni speciali sugli acidi erucici, ci stiamo ora occupando e ne parleremo a ricerca compiuta. Presentemente noi esponiamo i risultati avuti con lo studio dei punti eutettici.

Già fin dal 1910 Bruni <sup>(1)</sup> modificando un metodo anteriormente da lui proposto per decidere tra isomeria e polimorfismo, metodo che si basava sull'esame delle temperature di congelamento <sup>(2)</sup>, suggeriva un secondo metodo, che teoricamente equivale al primitivo, ma che può essere più sensibile ed anche di esecuzione più rapida, il metodo criodratrico od eutettico. Recentemente Sidgwick <sup>(3)</sup>, senza conoscere la proposta antecedente fatta da Bruni, espone un suo nuovo metodo per distinguere le sostanze tautomere e polimere dalle polimorfe, il quale è identico al metodo criodratrico od eutettico di Bruni <sup>(4)</sup>.

I dati sperimentali con i quali Sidgwick accompagna la sua Nota servono vieppiù a conferire valore al metodo stesso.

Se adunque, per quanto già sopra abbiain detto, l'esistenza dei tre acidi: erucico, brassidinico, isoerucico può dipendere solo da fenomeno di isomeria o di polimorfismo, il metodo crioscopico od eutettico dovrebbe fornirci dati per scegliere in riguardo.

Le misure col metodo eutettico da noi ora compiute ci dicono che:

Tra l'acido *erucico* ed il *brassidinico* si tratta d'un vero caso di isomeria: ciò è una conferma dei risultati avuti nelle Note II, III e IV, risultati che alla loro volta sono pienamente concordanti col contegno reciproco dei due acidi e col loro modo di formazione l'un dall'altro, per cui debbono ritenersi isomeri del tipo *cis trans*, precisamente come l'acido oleico è l'isomero geometrico dell'acido elaidinico.

Tra acido *erucico* ed *isoerucico* si tratta d'un vero caso di isomeria:

<sup>(1)</sup> *Isomeria chimica e polimorfismo*, in Atti e Memorie della R. Accad. di Scienze, lettere ed arti di Padova, vol. XXVI, disp. IV, 357 (22 maggio 1910).

<sup>(2)</sup> Gazz. ch. it., 32, I, 212 (1902).

<sup>(3)</sup> Journ. Chem. Soc., 107, 673 (1915).

<sup>(4)</sup> Cfr. Bruni, Gazz. ch. it., 46, I, 60 (1916).

ed anche questo sta in perfetto accordo con i risultati precedenti, con i quali si assegnava configurazione *cis* all'acido erucico e *trans* all'isoerucico.

Tra acido *brassidinic* ed *isoerucico* non pare trattarsi di isomeria vera: molto più probabilmente l'esistenza di questi due acidi appare dovuta ad un fenomeno di polimorfismo, per cui acquista verosimiglianza l'ipotesi che i due acidi siano da considerarsi come due forme di una stessa sostanza (dimorfismo).

#### PARTE SPERIMENTALE <sup>(1)</sup>.

##### *Misure col solvente acido acetico.*

L'acido erucico mostra peso molecolare normale nell'acido acetico (tavola I): il punto eutettico è certamente oltre la concentrazione del 50 % con un abbassamento superiore a  $\Delta = 1.74$ .

L'acido *brassidinic* è pochissimo solubile a freddo: ha contegno normale (tavola II). Eutettico: concentrazione 0,7 %;  $\Delta = 0.08$ ;

La miscela eutettica di acido acetico e *brassidinic* subisce un abbassamento normale per aggiunta di acido erucico (tavola III). Ciò conferma che l'acido erucico ed il *brassidinic* sono due sostanze isomere nello stretto senso della parola.

La miscela eutettica acido acetico e *brassidinic* mostra abbassamento anormale per aggiunta di acido *isoerucico* (tavola IV).

L'acido *isoerucico* produce abbassamento normale in acido acetico (tavola V). L'eutettico è a 3,16 % di acido *isoerucico*, con  $\Delta = 0.365$ .

Se a questa miscela eutettica si aggiunge acido *brassidinic*, si nota un lieve innalzamento: se alla stessa miscela eutettica si aggiunge acido erucico, si ha abbassamento normale.

Dunque l'acido erucico ed *isoerucico* sono veri isomeri, mentre la cosa è molto dubbia per l'acido *brassidinic* e l'*isoerucico*. Sulla causa dell'innalzamento lieve, che si osserva in tal caso, è prematuro il pronunciarsi.

##### *Misure col solvente benzolo.*

L'acido erucico, come era da prevedersi trattandosi di sostanza carbossilata, dà abbassamenti più piccoli dei teorici (tavola VI). L'aggiunta di acido *brassidinic* alla miscela eutettica di benzolo e acido erucico ne abbassa lievissimamente il punto di congelamento, perchè l'acido *brassidinic* è praticamente insolubile in benzolo freddo. L'aggiunta di acido *isoerucico* alla stessa miscela eutettica ne abbassa considerevolmente il punto di solidificazione.

L'acido *isoerucico* produce in benzolo un abbassamento più piccolo del normale (tavola VII).

La miscela eutettica benzolo e acido *isoerucico* subisce un innalzamento per aggiunta di acido *brassidinic*. Anche in benzolo adunque si verificano i fenomeni osservati con l'acido acetico.

(1) Maggiori particolari verranno pubblicati in altro loco.

*Misure col solvente acido acetico*

(acido erucico =  $C_{22}H_{42}O_2 = 338$ ).

|     | Numero<br>d'ordine | Solvente<br>gr.                                            | Sostanza<br>sciolta<br>gr.     | Concentrazione<br>in gr.<br>per 100 gr.<br>di solvente | Abbassamento<br>$\Delta$ | Peso<br>molecolare |
|-----|--------------------|------------------------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------|
| I   |                    | ac. acetico                                                | ac. erucico                    |                                                        |                          | ( $k = 39.0$ )     |
|     | 1                  | 11.15                                                      | 0.0919                         | 0.824                                                  | 0.095                    | 338.2              |
|     | 2                  | —                                                          | 0.1286                         | 1.153                                                  | 0.14                     | 321.2              |
|     | 3                  | —                                                          | 0.2874                         | 2.577                                                  | 0.31                     | 324.0              |
|     | 4                  | 11.38                                                      | 0.1110                         | 0.975                                                  | 0.115                    | 330.8              |
|     | 5                  | —                                                          | 0.2359                         | 2.073                                                  | 0.24                     | 336.9              |
| II  | 6                  | 12.50                                                      | acido<br>brassidinico<br>0.044 | 0.353                                                  | 0.04                     | 344.2              |
| III | 7                  | miscela<br>eutettica:<br>brassidinico-<br>acetico<br>11.66 | ac. erucico<br>0.1615          | 1.385                                                  | 0.155                    | 348.5              |
| IV  | 8                  | miscela<br>eutettica:<br>id. id.<br>12.50                  | isoerucico<br>0.107            | 0.856                                                  | 0.13                     | 256.8              |
| V   | 9                  | ac. acetico<br>9.05                                        | isoerucico<br>0.1806           | 1.996                                                  | 0.225                    | 346                |

*Misure col solvente benzolo*

(acido erucico =  $C_{22}H_{42}O_2 = 338$ ).

|     |    |         |                      |       |      |              |
|-----|----|---------|----------------------|-------|------|--------------|
| VI  |    | benzolo | ac. erucico          |       |      | ( $k = 51$ ) |
|     | 10 | 8.47    | 0.0929               | 1.097 | 0.12 | 468          |
|     | 11 | —       | 0.2910               | 3.436 | 0.32 | 547          |
| VII | 12 | 10.40   | isoerucico<br>0.1065 | 1.024 | 0.08 | 652          |
|     | 13 | —       | 0.2100               | 2.019 | 0.17 | 605          |

**Patologia vegetale. — Una nuova malattia del Cacao (*Theobroma Cacao* L.)** <sup>(1)</sup>. Nota preliminare di MALUSIO TURCONI, presentata dal Socio GIOVANNI BRIOSI.

Le foglie di alcune piante di Cacao (*Theobroma Cacao* L.) coltivate nelle serre dell'Orto Botanico di Pavia, vanno soggette da qualche tempo ad un'infezione crittogamica nuova fra le malattie del Cacao finora studiate dagli autori.

I primi sintomi del male si manifestano in forma di areole di color verde pallido, a contorno indefinito, meglio discernibili per trasparenza, che si fanno di mano in mano più appariscenti, gialliccie, ed infine danno luogo a macchie secche per ammortizzazione completa dei tessuti infetti. In questi l'esame microscopico rivela la presenza di numerosi fili micelici brunicci, settati, dello spessore di 4-6  $\mu$ , ramificantisi in filamenti più sottili, più chiari o ialini, invadenti il mesofillo, che percorrono in tutti i sensi insinuandosi fra cellula e cellula e penetrando anche nelle cavità cellulari.

Le macchie che si formano nella parte interna della foglia sono rotondeggianti od ovali e grandi da uno a tre centimetri, quelle più frequenti, marginali, apicali o basali, hanno contorno irregolare e raggiungono dimensioni maggiori così da invadere gran parte del lembo. Nella pagina superiore sono di color nocciola chiaro o grigio cenere limitate da una zona rosso-bruna: nella pagina inferiore invece sono di un color castagno chiaro che si fa più scuro verso il margine.

In tali macchie, specie nella pagina superiore, appaiono in seguito numerosi puntini neri dovuti ad altrettanti periteci globosi od ovato-globosi del diametro di 100-150  $\mu$  immersi nel mesofillo, con parete pseudo-parenchimatosa piuttosto grossa (15-20  $\mu$ ), bruno nerastra ed un ostiolo di color più chiaro a forma di papilla conoidea erompente dall'epidermide. Contengono numerosi aschi, sorgenti dal fondo della cavità periteciale, clavati o cilindraceo-clavati, lunghi 40-60  $\mu$ , larghi 10-14  $\mu$ , frammisti a parafisi di pari lunghezza, filiformi, esilissime, con otto spore ciascuno disposte entro l'asco obliquamente in una sola serie o in due serie incomplete.

Le ascospore sono oblungo-ellissoidali arrotondate alle due estremità, finamente granulose, ialine e misurano 12-16  $\mu$  in lunghezza per 4-6  $\mu$  di larghezza.

Pei caratteri morfologici, ora esposti, questa forma ascofora va ascritta al genere *Physalospora* (fam. *Sphaeriaceae*, Sez. *Hyalosporae*). Essa non è

<sup>(1)</sup> La Memoria in esteso, illustrata con una tavola litografata, sarà pubblicata negli Atti dell'Istituto Botanico di Pavia, ove il lavoro fu eseguito.



per altro la sola forma fungina presente sulle foglie malate poichè vi si trovano quasi sempre anche due forme conidifere, una microconidica e l'altra macroconidica, ambedue con ife sterili interne invadenti i tessuti ed ife fertili uscenti all'esterno per rottura dell'epidermide o per le aperture stomatiche e formanti sulle macchie una specie di muffa esile e grigiastra. La prima, in prevalenza sulla pagina superiore e presente talora anche nella inferiore, mostra dei conidiofori per lo più sparsi, isolati, più di rado riuniti in numero di due a quattro in cespuglietto, eretti, settati, cilindracei, un po' ingrossati alla base e leggermente assottigliantisi verso l'alto, ove sono ramificati con rami opposti o verticillati.

La lunghezza dei conidiofori varia da 100 a 400  $\mu$ ; il loro colore decisamente bruno dalla base sino a due terzi circa d'altezza, dove incomincia la ramificazione, va poi sfumando gradatamente fino a divenire perfettamente jalino verso l'estremità superiore che termina in un apice appuntito.

I rami, per lo più disposti a verticilli in numero di tre a cinque, di rado anche due soli opposti, lesiniformi ad apice appuntito, generalmente semplici, lunghi 20-30  $\mu$ , talora però lunghi anche il doppio ed a loro volta ramificati con uno o due verticilli di rami secondari, sono quasi sempre jalini, in qualche caso quelli dei verticilli inferiori leggermente brunici. Sono inseriti di solito all'estremità superiore dei segmenti del conidioforo e portano al loro apice capolini sferici di varia grossezza (15 a 40  $\mu$  di diametro) formati dai conidi insieme conglobati da mucillaggine così che simulano degli sporangi.

In presenza d'acqua la mucillaggine si dissolve lasciando libere numerose sporicine, jaline, oblunghe o cilindracee, ad estremità ottuse, lunghe 4-6  $\mu$ , larghe 2  $\mu$ .

La forma macroconidica, frammista non di rado alla precedente sulla pagina superiore, ma di solito in prevalenza nella inferiore, presenta pure conidiofori quasi sempre isolati; assai di rado due o tre insieme ravvicinati simulano un cespuglietto; sono eretti, ovvero ascendenti, talora più o meno incurvato-contorti.

A differenza dei conidiofori della forma microconidica, essi sono semplici, e di color bruno-fuligineo omogeneo in tutta la loro lunghezza, la quale varia da mezzo a un millimetro. Sono cilindracei, con cellula basale ingrossata, bulbosa; il tratto inferiore (la metà circa) con rari setti senza rigonfiamenti, e la metà superiore invece settato-articolata, costituita cioè da diversi articoli (6-10) di lunghezza variabile (15-60  $\mu$ ), nodoso-rigonfiati all'apice sì da dar quasi l'immagine del tarso articolato di una zampa d'insetto.

I conidii sono acrogeni, originantisi all'apice dei conidiofori, di color più chiaro di questi, quasi ialini, talvolta cilindracei, per lo più però obclavati o cilindraceo-obclavati, con apice arrotondato e base largamente ottusa od

ottuso-troncata. Sono diritti o leggermente curvi, presentano numerosi setti trasversali e misurano da 60 a 160  $\mu$  in lunghezza per 12-20  $\mu$  di larghezza.

In base ai caratteri microscopici testè descritti, le due forme conidifere trovano il loro posto sistematico nell'ordine *Hyphales*, famiglia *Dematiaceae* e vanno ascritte: la microconidica al genere *Stachylidium*, la macroconidica al genere *Helminthosporium*.

Nel 1909 C. F. v. Faber <sup>(1)</sup> pubblicò una estesa monografia delle malattie del Cacao, nella quale menziona i funghi parassiti e saprofiti fin'allora riscontrati su tale pianta; in tutto una cinquantina di specie; egli però ne dimentica parecchi che pure erano di già stati descritti. Una ventina di nuove specie vennero inoltre in questi ultimi anni pure riscontrate sul Cacao e descritte da diversi autori, così ora circa ottanta sono i miceti parassiti o saprofiti vegetanti sul *Theobroma Cacao*; di questi otto vivono sulle foglie.

Queste specie peraltro appartengono a generi e famiglie ben diverse da quelle cui vanno ascritte le nostre tre forme di *Physalospora*, *Stachylidium* ed *Helminthosporium*, le quali, come dimostrerò nel lavoro definitivo, sono ben distinte pure dagli altri micromiceti (non foglicoli) del Cacao ed altresì da tutte le specie congeneri finora note.

Sono dunque forme nuove per la scienza che denomino: *Physalospora Theobromae*, *Stachylidium Theobromae*, *Helminthosporium Theobromae*.

Eccone la diagnosi:

*Physalospora Theobromae* n. sp. — *Maculis plerumque marginalibus, irregularibus, amplis, magnam folii partem obtegentibus, rarius internis, rotundis vel oblongis, 1-3 cm. diam., in pagina superiore pallide avellaneis vel albo griseis, rubro-brunneo delimitatis, in inferiore pallide castaneis margine obscuriore; peritheciis epiphyllis vel amphigenis, sparsis aut laze gregaris, globosis vel ovato-globosis, 100-150  $\mu$  diam., nigris, immersis, ostiolo pallidiore, papillato conoideo erumpentibus; ascis clavatis vel cylindraceo-clavatis, apice obtuse rotundatis, infere attenuatis ac breve stipitatis 40-60  $\times$  10-14  $\mu$  paraphysibus filiformibus, ascis aequilongis vel paullo longioribus, tenuissimis, evanidis obrvallatis, octosporis; sporidiis oblique monostichis vel irregulariter distichis, oblongo-ellipsoideis, granulosis, hyalinis 12-16  $\times$  4-6  $\mu$ .*

In foliis *Theobromae Cacao* in calidariis Horti Botanici Ticinensis.

*Stachylidium Theobromae* n. sp. — *Conidiophoris plerumque solitariis aut laze gregaris, rare 2-4 in caespitulum congestis, erectis 100-400  $\times$*

<sup>(1)</sup> Faber v. C. F., *Die Krankheiten und Parasiten des Kakaobaumes* (Arbeiten aus der Kaiserl. Biolog. Anstalt für Land- und Forstwirtschaft, Band. VII, H. 2, pp. 103-350, Berlin, 1909).

4-6  $\mu$ . septatis, cylindraceis, basi subincrassatis, fuligineis, sursum sensim tenuatis, pallidioribus atque verticillato-ramosis; ramis pallidioribus vel hyalinis, subulatis, apice acutatis, 3-5 in quoque verticillo, rarius binis oppositis, plerumque simplicibus 20-30  $\mu$  longis, quandoque vero duplo longioribus iterumque verticillato ramulosis; conidiis in apice ramulorum capitulato-glomeratis, globulos sphaericos, mucro obvolutos, translucidos, 15-40  $\mu$  diam. efformantibus, dein madore diffluentibus, oblongis vel cylindraceis 4-6  $\times$  2  $\mu$  hyalinis.

-In foliis *Theobromae Cacao* socia *Physalospora Theobromae*.

*Helminthosporium Theobromae* n. sp. — Conidiophoris erectis vel adscendentibus quandoque plus minusve contortis,  $\frac{1}{2}$ -1 mm. longis, solitariis, rarissime binis-trinis in caespitulum laxum congestis, simplicibus, cylindraceis, basi incrassato bulbosis, dimidio inferiore remote septatis, sursum 6-10 septato-articulatis, articulis longitudine variis 15-60  $\mu$ , apice noduloso-inflatis, fuligineo-ferrugineis; conidiis pallidioribus, acrogenis, plerumque obclavatis vel cylindraceo-obclavatis, sursum attenuatis atque rotundatis, basi late obtusis vel rotundato-truncatis, pluriseptatis, 60-160  $\mu$  longis, 12-20  $\mu$  crassis.

In foliis *Theobromae Cacao* socia *Physalospora Theobromae*.

Chimica fisiologica. — *Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia*. III: *Applicazione della macrotitolazione al formolo per lo studio dell'arginasi*. Nota del dott. A. CLEMENTI, presentata dal Corrisp. D. LO MONACO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica fisiologica. — *Sugli elementi che condizionano l'attività degli enzimi glicolitici. II: Gli enzimi glicolitici dell'intestino e i corpuscoli sanguigni.* Nota di CAMILLO ARTOM, presentata dal Socio L. LUCIANI.

In una serie di ricerche sperimentali sul metabolismo del glicosio in organi sopravvivalenti, eseguite in collaborazione dal prof. U. Lombroso e da me <sup>(1)</sup>, avevamo osservato che una soluzione di glicosio in liquido di Tyrode, messa in termostato, dopo prolungata circolazione in un segmento intestinale isolato, e lasciata ivi per molte ore, non modificava il suo contenuto zuccherino. Al contrario, una profonda e rapida distruzione del glicosio si aveva, quando invece di liquido di Tyrode si era adoperato per la circolazione nell'intestino sopravvivalente sangue defibrinato con glicosio <sup>(2)</sup>. Una differenza perfettamente simile fra le circolazioni con liquido di Tyrode e quelle con sangue, si era osservata nelle analoghe esperienze sul pancreas isolato. Ora in una Nota precedente <sup>(3)</sup> il prof. Lombroso ha dimostrato che la glicolisi avviene anche nella soluzione di Tyrode con glicosio, circolata nel pancreas, purchè vi si aggiungano corpuscoli del sangue: si può dunque affermare che anche nelle circolazioni con liquido di Tyrode il pancreas provvede alla formazione di enzimi glicolitici, e li riversa nel liquido stesso, ma che l'attività di questi enzimi è condizionata dalla presenza dei corpuscoli sanguigni.

Appariva logico di riprendere lo studio della glicolisi in una soluzione di Tyrode con glicosio, circolata nell'intestino, con una disposizione sperimentale identica a quella usata nelle ricerche menzionate or ora. Sorgeva infatti spontaneo il pensiero che, come per gli enzimi glicolitici del pancreas, così anche per quelli producentisi nella circolazione artificiale di un segmento intestinale sopravvivalente, fosse necessario il concorso degli elementi cellulari del sangue, affinchè potesse esplicarsi l'attività glicolitica di tali enzimi.

Ad un cane, tenuto digiuno per 48 ore ed appena ucciso per dissanguamento, asportavo buona parte dell'intestino tenue; lo liberavo con la pressione manuale dallo scarso contenuto; ne lavavo abbondantemente il lume con soluzione fisiologica; introducevo la cannula per la circolazione nell'arteria mesenterica media; applicavo ai due estremi del segmento una doppia legatura, e lo ponevo nell'apparecchio di Linde. Come liquido per la circo-

(<sup>1</sup>) Lombroso, Rend. Accad. Lincei, vol. XXV, 2° sem., 1916; Artom, ibidem.

(<sup>2</sup>) Id. ibid., Rend. Accad. Lincei, vol. XXV, 2° sem., pag. 41 (1916).

(<sup>3</sup>) Id. ibid., Rend. Accad. Lincei, vol. XXV, 2° sem., 1916.



lazione adoperavo una soluzione di Tyrode, a cui avevo aggiunto glicosio in proporzione del  $\frac{1}{2}$ -1 ‰, e una mescolanza di fosfati mono- e bi-potassico al  $\frac{1}{2}$  ‰ circa: l'aggiunta di fosfati avrebbe infatti, secondo i lavori di Rona e Döblin <sup>(1)</sup> e di molti altri, un'azione singolarmente favorevole sulla glicolisi.

Il liquido raccolto dopo la circolazione era posto in termostato insieme con corpuscoli dello stesso animale, ottenuti con la centrifugazione. Per controllo serbavo in termostato campioni del liquido non circolato, ed altri dello stesso liquido non circolato, a cui aggiungevo corpuscoli sanguigni. In tutte le provette ponevo toluolo, per diminuire e ritardare lo svolgimento dei batteri.

I dosaggi del glicosio erano compiuti col metodo di Lehmann-Emdem, previa dealbuminizzazione con ferro colloidale, quando si dovevano eseguire sui campioni, a cui si erano aggiunti corpuscoli sanguigni. Spesso, e particolarmente nei dosaggi terminali di ogni esperienza, si ricercava anche il potere riducente del campione, dopo di averlo idrolizzato con acido cloridrico, allo scopo di distinguere il fenomeno della distruzione reale del glicosio da quello interferente di una sua semplice condensazione molecolare.

## I.

Cane kg. 18. Circolazione con liquido di Tyrode modificato cm.<sup>3</sup> 400 + glicosio 0,5 ‰. Peso dell'organo posto a circolare gr. 230, dopo circolazione gr. 400. Pressione 40-60 mm. Hg. Velocità di circolazione per minuto cm.<sup>3</sup> 12. Durata della circolazione  $\frac{1}{2}$  ora. La circolazione è iniziata un'ora circa dopo la morte dell'animale.

|                                   |                                                                  |                      |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------|
| Appena cessata<br>la circolazione | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato . . . . .              | = 53.7 mgr. glicosio |
|                                   | 10 " " circolato . . . . .                                       | = 53.0 " "           |
| Dopo 4 ore<br>di termostato       | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . . | = 53.7 mgr. glicosio |
|                                   | 10 " " circolato + " . . . . .                                   | = 42,5 " "           |
|                                   | 10 " " " . . . . .                                               | = 49,0 " "           |
| Dopo 14 ore<br>di termostato      | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . . | = 53.7 mgr. glicosio |
|                                   | 10 " " circolato + " . . . . .                                   | = 47.7 " "           |
|                                   | 10 " " " + " idrolizz. con HCl . . . . .                         | = 53.0 " "           |
|                                   | 10 " " " . . . . .                                               | = 51.2 " "           |
|                                   | 10 " " " idrolizzato con HCl . . . . .                           | = 51.2 " "           |

## II.

Cane kg. 18. Circolazione con liquido di Tyrode modificato cm.<sup>3</sup> 500 + glicosio 1 ‰. Peso dell'organo posto in circolazione gr. 170, dopo circolazione gr. 240; succo raccolto nel lume intestinale cm.<sup>3</sup> 170. Pressione 40-60 mm. Hg. Velocità media di circolazione per minuto cm.<sup>3</sup> 45. Durata della circolazione 1 ora.

<sup>(1)</sup> Rona e Döblin, Biochem. Zeischr., XXXII, pag. 489, an. 1911.

|                                   |                                                                  |                       |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Appena cessata<br>la circolazione | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato . . . . .              | = 101.8 mgr. glicosio |
|                                   | 10 " " circolato . . . . .                                       | = 88.2 " "            |
| Dopo 4 ore<br>di termostato       | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . . | = 99.7 mgr. glicosio  |
|                                   | 10 " " circolato + " . . . . .                                   | = 79.4 " "            |
|                                   | 10 " " " . . . . .                                               | = 86.9 " "            |
| Dopo 18 ore<br>di termostato      | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . . | = 96.4 mgr. glicosio  |
|                                   | 10 " " circolato + " . . . . .                                   | = 65.2 " "            |
|                                   | 10 " " " + " idrolizz. con HCl . . . . .                         | = 74.5 " "            |
|                                   | 10 " " " . . . . .                                               | = 81.3 " "            |
|                                   | 10 " " " idrolizzato con HCl . . . . .                           | = 81.3 " "            |

### III.

Cane kg. 20. Circolazione con liquido di Tyrode modificato cm.<sup>3</sup> 500 + glicosio 1 ‰.  
Peso dell'organo posto in circolazione gr. 160, dopo circolazione gr. 180; succo raccolto  
nel lume intestinale dopo circolazione cm.<sup>3</sup> 140. Pressione 40-60 mm. Hg Velocità media  
di circolazione per minuto cm.<sup>3</sup> 30. Durata della circolazione ore 1 e  $\frac{1}{2}$ .

|                                   |                                                                  |                      |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------|
| Appena cessata<br>la circolazione | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato . . . . .              | = 95.6 mgr. glicosio |
|                                   | 10 " " circolato . . . . .                                       | = 81.3 " "           |
| Dopo 3 ore<br>di termostato       | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . . | = 95.6 mgr. glicosio |
|                                   | 10 " " circolato + " . . . . .                                   | = 75.9 " "           |
|                                   | 10 " " " . . . . .                                               | = 80.3 " "           |
| Dopo 7 ore<br>di termostato       | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . . | = 95.6 mgr. glucosio |
|                                   | 10 " " circolato + " . . . . .                                   | = 67.7 " "           |
|                                   | 10 " " " . . . . .                                               | = 75.6 " "           |
| Dopo 21 ore<br>di termostato      | 10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . . | = 65.8 mgr. glicosio |
|                                   | 10 " " " " + " idrolizz. con HCl . . . . .                       | = 79.4 " "           |
|                                   | 10 " " circolato + " . . . . .                                   | = 59.0 " "           |
|                                   | 10 " " " + " idrolizz. con HCl . . . . .                         | = ? " "              |
|                                   | 10 " " " . . . . .                                               | = 75.2 " "           |

Nel valutare i dati sperimentali riferiti, bisogna avvertire che, non-  
ostanti le maggiori precauzioni per guarentire lo svolgimento asettico della  
reazione, è quasi impossibile, in questo genere di ricerche, impedire un certo  
grado di inquinamento batterico, i cui effetti, nulli o quasi nulli nei primi  
tempi di permanenza in termostato, divengono rilevanti per periodi superiori  
alle 7-8 ore: i valori quindi, ottenuti negli ultimi dosaggi di ciascuna espe-  
rienza, devono essere accolti con prudenza, in quanto essi rappresentano la  
somma dell'azione dell'enzima glicolitico e di quella dei microrganismi,  
inquinanti il liquido in esame.

Ciò premesso, noi possiamo tuttavia affermare, con bastevole sicurezza,  
dai risultati delle nostre ricerche che il liquido di Tyrode con glicosio, cir-  
colato in un segmento intestinale sopravvivate, e quindi posto in termo-  
stato, non modifica che assai poco il suo contenuto in glicosio.

Se a questo liquido si aggiungono corpuscoli del sangue, non si ottiene neppure allora una distruzione profonda del glicosio, e, se si osserva una mediocre diminuzione del potere riducente, questa può in parte attribuirsi a una semplice condensazione molecolare del glicosio, e in parte all'azione glicolitica degli stessi corpuscoli sanguigni: infatti, anche una soluzione di glicosio in Tyrode, non circolata nell'intestino, quando vi si aggiungano corpuscoli del sangue, mostra spesso una lieve diminuzione del potere riducente.

Vi è dunque una differenza profonda fra il liquido di Tyrode con glicosio circolato nell'intestino, e il liquido di Tyrode con glicosio circolato nel pancreas: basta aggiungere a questo corpuscoli del sangue, perchè esso dimostri un'attività glicolitica molto intensa, mentre al contrario l'aggiunta dei corpuscoli al liquido circolato nell'intestino non basta a conferirgli la capacità di distruggere il glicosio.

Sull'intima ragione di questa diversità di comportamento, noi non possiamo fare alcuna sicura affermazione. I risultati delle nostre esperienze ci suggeriscono, peraltro, alcune ipotesi, che attendono la loro dimostrazione sperimentale. Noi possiamo cioè pensare che, a differenza del pancreas, l'intestino sopravvivate produca enzimi glicolitici soltanto quando è irrorato con sangue contenente glicosio, e non quando sia perfuso con soluzione di glicosio in liquido di Tyrode; ovvero, che anche con quest'ultima disposizione sperimentale l'intestino dia luogo alla formazione di enzimi glicolitici, ma che sia necessario, perchè questi esplicino la loro azione, la presenza contemporanea, non della parte corpuscolare, ma del siero di sangue, ovvero dei corpuscoli e del siero insieme. Quale di queste ipotesi sia la vera, ci ripromettiamo di indagare in una nuova serie di ricerche sperimentali.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente RÒITI dà, con commosse parole, il triste annuncio della perdita fatta dall'Accademia nella persona del suo Corrispondente professor ANGELO BATTELLI; e legge poscia, a nome del Socio nazionale A. NACCARI, la seguente Commemorazione del defunto Corrispondente:

ANGELO BATTELLI nacque a Macerata Feltria nel marzo del 1862. Compiuti gli studi secondari, egli non ebbe esitazione alcuna nella scelta della scienza, a cui dedicarsi, e appena entrato nell'Università di Torino chiese di poter frequentare il Laboratorio di Fisica. Egli tanto s'esercitò e s'addestrò come studente, che, quando fu laureato nel 1884, era già maturo per imprendere da sè dei lavori sperimentali di notevole difficoltà.

Studiò dapprima la termoelettricità. L'attraeva quell'argomento che ben si presta a riscontri fra teoria ed esperienza. Esaminò anzi tutto le proprietà termoelettriche di numerose leghe binarie, indi passò al fenomeno

Thomson. Fu egli il primo a determinare il valore assoluto di quella grandezza, che il Thomson chiamò *calore specifico dell'elettricità*. Operò dapprima sul cadmio, e il buon esito di queste esperienze lo incoraggiò ad estenderle ad altri cinque metalli. Venne così a concludere che l'intensità del fenomeno è in tutti i metalli da lui studiati proporzionale al valore dell'intensità della corrente ed è pure, fatta eccezione per il ferro, proporzionale alla temperatura assoluta.

Verificò il Battelli l'esistenza del fenomeno stesso e ne misurò l'intensità in due casi di speciale interesse, cioè nel piombo e nel mercurio e per eccitamento del Tait indagò se nel nichel avvenga ad una certa temperatura un cambiamento di segno del fenomeno.

L'effetto Peltier fu pure argomento di ripetute indagini del Battelli ed è notevole un suo scritto del 1887, nel quale descrive l'esperienze fatte con due leghe scelte opportunamente e tali che per esse, congiunte col piombo, il fenomeno Peltier s'annulla a temperature poco diverse delle ordinarie. A queste ricerche egli altre ne aggiunse alcuni anni più tardi intorno alla influenza del magnetismo e delle azioni meccaniche sui fenomeni termoelettrici.

Fra i suoi primi lavori meritano di essere menzionati anche quelli intorno all'influenza della pressione sulla temperatura di fusione, in cui trovò una buona verifica della formula di J. Thomson, come pure quelli compiuti insieme col Palazzo sulle variazioni di volume di alcuni corpi per effetto della fusione e quelli fatti con la collaborazione del Martinetti su argomenti affini.

Uno studio, che richiese cure pazienti e avvedute per ottenere sensibilità ed esattezza, fu quello intorno all'influenza della magnetizzazione sulla conducibilità termica del ferro. I risultati avuti da altri sperimentatori erano molto discordi. Il Battelli, perfezionando successivamente il metodo e gli apparecchi potè mettere in chiaro una piccola diminuzione.

Nel 1887 il Battelli imprese un lavoro di gran lena che proseguì per più anni e in luoghi diversi. Egli si propose di determinare per i vapori delle sostanze più importanti la legge che lega il volume, la temperatura e la pressione, quando variano le condizioni, rimanendo costante la massa. Egli voleva inoltre determinare le costanti del punto critico, le densità del vapore allo stato di saturazione a varie temperature, le densità dei liquidi sotto pressione eguale alla tensione massima del vapore e alla stessa temperatura di esso, i calori specifici dei vapori e dei liquidi. In questo vastissimo programma si manifesta il carattere del Battelli, che non si arretrava innanzi ad alcuna difficoltà. Egli iniziò le esperienze e ne eseguì buona parte quand'era assistente a Torino.

Il metodo seguito dal Battelli è quello del tracciamento delle isoterme. La prima sostanza studiata fu l'etere: la temperatura ebbe per limiti



—28 e 206°. Fra questi furono tracciate venti isoterliche. La pressione salì fino a 45 atmosfere. Questi numeri mostrano le difficoltà che dovettero essere superate fin da principio, e se si considera che queste esperienze sull'etere vennero eseguite nelle stanze anguste e disadatte dell'antico Laboratorio dell'Università di Torino, con apparecchi che in gran parte dovettero essere costruiti dallo stesso sperimentatore, il merito di lui appare ancora più grande.

Difficoltà maggiori opposero l'esperienze sull'alcool e segnatamente quelle sull'acqua per la determinazione del punto critico e delle costanti relative.

Va anche notato che gli apparecchi dovettero per due volte essere disfatti e ricostruiti, perchè l'esperienze, interrotte nel 1889 a Torino, vennero proseguite a Cagliari e a Padova.

Le quattro prime Memorie pubblicate dal Battelli su questo argomento ebbero il premio Bressa dall'Accademia delle Scienze di Torino nel 1893.

Appartengono allo stesso programma le Note sulle isobare dei vapori, sullo stato della materia al punto critico, sul calore specifico dei liquidi che solidificano a temperatura molto bassa e sulle densità d'alcuni liquidi sotto la pressione dei propri vapori saturi.

Altro studio importante e molto esteso è quello sulle scariche elettriche oscillatorie, ch'ebbe nel 1908 il premio reale dall'Accademia dei Lincei. Esso è costituito da un gruppo di Memorie, che trattano varie parti del difficile soggetto. La parte sperimentale fu fatta in collaborazione col dottor Luigi Maggi poco dopo rapito improvvisamente alla scienza.

Per verificare la nota formula del Thomson bisognava misurare periodi brevissimi. Scelto il metodo del Feddersen, il Battelli fece costruire un apparecchio atto a dare agli specchi una grande velocità di rotazione, che poteva venir misurata con la necessaria esattezza. Anche gli apparecchi accessori richiesero ingegnosi espedienti.

Molte esperienze vennero eseguite per lo studio dei fenomeni di auto-induzione e dell'influenza che sulla scarica oscillatoria attraverso un filo avvolto ad elica esercita la natura dei nuclei costituiti da varie sostanze ferro-magnetiche. Non è possibile qui descrivere le particolarità della indagine, nè porre in rilievo l'importanza dei risultati, ma è certo che queste esperienze valsero a portare molta luce su quei complicati fenomeni. Similmente mi è forza accennare soltanto ad altri lavori dell'instancabile indagatore. Ricordo le sue esperienze sui raggi Röntgen, sulla radioattività, sulle correnti telluriche, sulla pressione osmotica, sulla legge del Boyle, e le sue misure di magnetismo terrestre.

Nè posso far più che menzionare i libri da lui pubblicati con l'aiuto di amici od allievi come quello sulla teoria della dissociazione elettrolitica che fu premiato dal R. Istituto Lombardo e quello sulla radioattività; e i suoi scritti didattici, come il grande trattato scritto col prof. Cardani e i libri elementari per le scuole secondarie, che ebbero rapida diffusione.

Merito insigne del Battelli fu l'aver ampliato e reso adatto a grandi ricerche l'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa. Quale il Battelli lo trovò non poteva quell'Istituto certamente servire nè per l'istruzione pratica degli allievi, nè per numerosi e svariati studi sperimentali fatti contemporaneamente. Mercè le cure di lui, esso acquistò nuove ed acconciissime ed ebbe conveniente disposizione, ricca suppellettile scientifica ed una utilissima officina per l'addestramento di giovani tecnici. In esso il Battelli ebbe la soddisfazione di raccogliere una schiera numerosa e valente di giovani studiosi che sotto la sua direzione eseguirono lavori molto pregevoli.

Della sua opera parlamentare dirò soltanto che nessuna questione attinente alla pubblica istruzione fu da lui trascurata. Spesso egli anche ne tenne autorevolmente parola alla Camera ed è ben noto quanta fatica gli costasse la nuova legge sull'istruzione superiore.

L'incessante operosità del Battelli doveva necessariamente logorarne le forze fisiche. Alle fatiche intellettuali s'aggiungevano i disagi, i viaggi quasi sempre notturni, la mancanza del necessario riposo: forse avrebbe egli vinta la grave malattia che lo colse, se, cedendo alle istanze dei parenti e degli amici, si fosse a tempo rassegnato ad una vita tranquilla. Ma per lui non era possibile altra vita che quella, ch'era sempre stata la sua, vale a dire movimento e lavoro. Così avvenne che il suo organismo, precocemente indebolito, non resse all'assalto del male; e la sua fervida vita si chiuse a 54 anni la mattina dell'undici dicembre testè decorso.

Argelo Battelli mi fu assiduo compagno nel primo periodo della sua vita scientifica. Io lo vedeva ogni giorno alacremente intento alle sue esperienze, non mai scoraggiato dagli ostacoli, anzi vieppiù eccitato alla lotta, pronto ad immaginare nuovi espedienti per vincere le difficoltà, indefesso al lavoro e allo studio. E io rammento che fin d'allora egli riusciva a comunicare il suo ardore a chi gli stava dappresso, onde gli studenti che lo circondavano, gli offrivano l'opera loro e lo seguivano con amore nelle indagini.

Come ai suoi primi passi non c'era ostacolo che lo facesse arretrare, non fatica che lo sgomentasse, tale ei si serbò negli anni maturi. Se nell'ultimo tempo la sua operosità di scienziato apparve scemata, la causa di ciò fu per certo l'insidiosa malattia che l'andava logorando da tempo, ma finchè la sua vigoria fisica si mantenne, egli restò, qual era in gioventù, pieno d'ardore per la scienza, instancabile nel lavoro. Per queste doti tanto in lui segnalate il suo esempio vivrà ancora efficace nella memoria degli allievi che lo amavano tanto e anche l'opera sua di maestro non sarà spenta con lui.

Il Segretario E. MILLOSEVICH legge la seguente Commemorazione del Socio straniero OSKAR BACKLUND.

JOHAN OSKAR (Oskar Andrejewitsch) BACKLUND, direttore dell'Imperiale Osservatorio Astronomico Nicola a Pulkowa presso Pietrogrado, colà spegnevasi al mattino del 29 agosto 1916.

I tempi procellosi di oggi ci fecero assai tardi, e per via indiretta, consapevoli della grave perdita.

Backlund fu un astronomo, specialmente teorico, ragguardevole; era poi un uomo autorevolissimo nel ciclo internazionale degli studiosi.

Quando, negli ultimi lustri, i convegni per iscopi scientifici s'erano fatti più frequenti e per i bisogni delle scienze evolute e per i facili contatti, così che potevasi aver l'illusione che le arti della pace da sole avrebbero retto il mondo, Oskar Backlund era fra i più notevoli rappresentanti. La sua parola era ascoltata con devozione in riunioni o astronomiche o geodetiche o di fisica cosmica.

In quest'aula lo avemmo ospite gradito, allorchè ebbe luogo a Roma la accolta dei Delegati delle grandi Accademie mondiali.

In questa circostanza io ebbi l'onore d'una sua visita all'Osservatorio al Collegio Romano.

Era Backlund un bel tipo svedese, alto di statura, smilzo, gioviale; aveva serbato un aspetto giovanile ancor in verde vecchiaia.

Traeva egli la vita, il 28 aprile 1846, nella parrocchia di Långhem nel *län* (noi diremmo: governo o meglio prefettura) di Vermland a nord del grande lago, il Vener, in Isvezia.

Intorno al ventennio si recò all'Università di Upsala per istudiarvi le matematiche e l'astronomia.

Volle la sorte benefica metterlo a contatto di Gylden, in qualità di assistente nell'Osservatorio di Stoccolma, e già la tesi di laurea rivela l'azione del maestro, chè quella riguardò appunto uno studio sull'orbita del pianetino Ifigenia, scoperto a Clinton da C. H. F. Peters nel 1870.

Nel 1876 lo troviamo quale « Osservatore » alla Specola di Dorpart, e tre anni dopo Ottone Struve lo volle col grado di astronomo aggiunto a Pulkowa. L'imperiale Accademia delle scienze di Pietrogrado accolse ben presto fra i suoi il nostro Socio straniero, ed egli in brev'ora divenne uno dei più autorevoli ed ascoltati.

Quando Bredichine, che fu il direttore dell'Osservatorio di Pulkowa dopo Otto Struve, lasciò volontariamente quella direzione nel 1895, l'imperiale Accademia di Pietrogrado, cui spetta la designazione, elevò a quell'importante posto Oskar Backlund.

La serie II delle pubblicazioni dell'Osservatorio centrale Nicola era stata inaugurata da Brédichine colla pubblicazione delle osservazioni fatte al circolo verticale da Nyren.

Backlund la completò, e sotto la sua direzione vi aggiunse oltre venti preziosi volumi riguardanti in generale l'astronomia d'alta posizione, a cui s'aggiunsero, in causa dell'indirizzo moderno della scienza, le ricerche di astro-fisica.

È nostro dovere, allorchè ci proponiamo in brev'ora d'onorare un nostro Collega, di mettere in luce i punti salienti della sua produzione scientifica, trascurando di dire ciò che non dovrebbe essere trascurato ove uno dettar volesse una completa analisi scientifica.

Il calcolo delle perturbazioni generali coi metodi classici conduce ad un alto grado di precisione, e permette la costruzione delle tavole del moto dei pianeti, quando alcune condizioni felici siano soddisfatte.

Le forti eccentricità delle orbite dei pianetini rendono i procedimenti classici o penosissimi o insufficienti, nel senso almeno di rappresentazioni rigorose di conto quando vengano a confronto cogli atti osservativi; di qui i metodi abituali del calcolo delle perturbazioni speciali inflitte dalle grandi masse al pianetino; l'orbita di esso si modifica successivamente ne' suoi elementi, ma, per un dato intervallo, funge sempre l'ellisse Kepleriana osculante.

Se i pianetini scoperti fossero rimasti in piccolo numero, il lavoro di calcolo poteva reggere; ma, se si pensa che questi sono oggi intorno a 900, i procedimenti abituali non possono adescare e tener sacrificata gran parte delle forze vive dei cultori d'Urania; di qui, fra quei 900, abbiamo oggi un grosso numero di dispersi, di disertori e di ribelli.

Devesi a Gyldén l'idea madre di poter dare, fino dalla prima fase del calcolo, o meglio dopo che si ha una buona rappresentazione d'un ellisse Kepleriana, un'orbita più prossima al vero, che non sia la classica ellisse cogli elementi osculanti in tempi successivi, ma un'orbita speciale per la quale viene evitata la formazione dei termini secolari e l'introduzione dei piccoli divisori.

Non è questo il luogo, nè io ho l'autorità d'entrare in ardue questioni, che interessarono i più grandi matematici.

Sta di fatto che i procedimenti ideati dal Gyldén ed illustrati ed applicati dai suoi allievi diedero, danno e daranno risultati pratici più che sufficienti per il ritrovamento, con quasi nessuna fatica, dei pianetini in larghi intervalli di tempo, anche se, come asserirono critici competentissimi, possano subir qualche censura dal punto di vista di un'austera teoria.

Il nostro Socio, fattosi maestro in questi nuovi campi di meccanica celeste, arricchì i volumi dell'Imperiale Accademia di Pietrogrado di ricerche teoriche e di applicazioni pratiche. Alcune Note credette opportuno di inse-



rire nelle « Astronomische Nachrichten » sul prefato argomento o argomenti affini, come ad es. quella che riguarda le formole per il calcolo dell'orbita approssimata di pianetini del tipo di Ecuba con applicazione al (184) Dejepeja.

Ligio a quanto ho detto un momento fa, ometto di parlare di Backlund come osservatore, e avendo appena accennato alle sue ricerche sui metodi moderni nel calcolo delle orbite dei pianetini, debbo pur consacrare qualche periodo sul lavoro più importante che occupò per tanti anni l'attività scientifica del nostro Socio, voglio dire sulla teoria delle comete di Encke, che gli procurò l'alto onore della medaglia d'oro della Reale Società Astronomica di Londra.

Così denominasi la celebre cometa a corto periodo di circa 1200 giorni, perchè l'identità delle comete trovate da Méchain e Messier nel 1786, da Carolina Herschel nel 1795, da Pons, Huth e Bouvard nel 1805 e dallo stesso Pons nel 1818 venne messa fuori dubbio dalle poderose ricerche di Encke, ancor studente all'Università di Gottinga. Aveva Encke ritardato a compiere i suoi studi, perchè, nel periodo turbinoso del 1812-15, quando, e specialmente nel 1813 la Germania lottava per riacquistare la sua indipendenza, Encke serviva la patria come artigliere.

Dopo Tilsitt, ed anche a Tilsitt, Napoleone cominciava a violentare gli uomini e le cose, e le cose e gli uomini ebbero ragione sul genio; la storia ha ieri insegnato, e domani insegnerà.

Un fatto importante risultò dagli studi di Encke sull'orbita della cometa, che cioè, tutto messo in conto, il periodo rivolutivo, che era di giorni 1208, 122 fra il 1786 e il 1795, discendeva a giorni 1207, 424 fra il 1805 e il 1819.

Eravamo in presenza d'un fatto nuovo e imprevedibile, un'accelerazione, cioè, nel moto medio della cometa che, come ben si sa, non può subire alterazioni se non di carattere periodico per effetto delle perturbazioni, il che noi sappiamo ben calcolare.

Encke invoca l'ipotesi del *mezzo resistente*, e ne trae conferma nei successivi passaggi al perielio, così che l'azione del mezzo resistente sul moto della cometa venne da lui espresso da una forza tangenziale, avendo il mezzo resistente un'azione proporzionale alla sua densità e al quadrato della velocità della cometa, e supponendo che la densità del mezzo sia in ragione inversa del quadrato della distanza dal sole.

Dopo la morte di Encke, i calcoli sull'orbita della cometa di Encke vennero assunti da von Asten, e poichè, nel 1870, questi accettò un posto all'Osservatorio di Pulkowa, l'eredità degli studi sulla cometa passò in Russia.

Encke si era occupato della teoria dell'orbita della cometa fino al 1858, e già, nel proseguire gli studi, era entrato nella convinzione che, in luogo di ricorrere ad ipotesi fisiche, potevasi ben rappresentare l'accelerazione nel

moto medio proporzionalmente al tempo, mentre poi l'anomalia media subiva un incremento proporzionalmente al quadrato del tempo, un'ipotesi, in fatto, del tutto empirica.

A Pulkowa, gli studi sull'orbita della cometa entrarono in fase nuova, quella cioè di calcolare le perturbazioni speciali per archi d'anomalia rispondenti a vicinanze della cometa a grossi pianeti, e di calcolare invece le perturbazioni assolute per archi vicini all'afelio. Evidentemente i metodi di Gylden vi fecero capolino. Intanto, a soli 36 anni, moriva von Asten, e il nostro Socio assumeva la continuazione degli studi sull'orbita della cometa di Encke. Ben presto egli mise in luce il fatto nuovo che l'accelerazione nel moto medio, prima del 1871, cangiò nel senso di una diminuzione della medesima, e l'apparizione del 1884-85 confermò i suoi primi risultati; di fronte a un problema formidabile e ben difficilmente spiegabile colle abituali nostre ipotesi fisiche, Backlund venne nella grave deliberazione di rivedere l'intera teoria. Non gli mancarono i mezzi opportuni per raggiungere il proposito, perchè la generosità di Nobel vennegli incontro con sussidi economici tali da compensare i calcolatori delle perturbazioni speciali, con procedimento classico, a partire dal 1819. Egli tenne in conto le masse da Mercurio a Saturno, dal 1819 al 1891; le masse di Urano e di Nettuno avevano effetti trascurabili, in causa della postura dell'afelio della cometa. Sono *aseleni* Mercurio e Venere, donde la possibilità d'aver valori approssimati delle rispettive masse risulta soltanto dalle perturbazioni che quei pianeti possono infliggere; e però Backlund, nei tre distinti periodi, 1819-58, 1858-71, 1871-91, introdusse nelle equazioni differenziali, oltre le incognite di correzione ai sei elementi dell'orbita, altre tre incognite, cioè l'accelerazione al modo medio e le correzioni alle assunte masse di Mercurio e di Venere.

Il lavoro colossale di Backlund gli fornì due valori delle masse di Mercurio e di Venere abbastanza prossimi ai più probabili oggidì adottati e derivanti da altre ricerche consimili. In riguardo poi all'accelerazione nel moto medio, essa risultò reale, ma ad un tempo apparve la sua irregolarità, e credo sia da disperare di poter giustificare questa colle nostre ipotesi fisiche. In una grossa media, fra il 1819 e il 1858, l'accelerazione è costante; diminuisce in valore nel 1858 e nel 1868, riprende la costanza fra 1871 e 1891, e da ultimo si riduce piccolissima.

Backlund era un astronomo matematico e calcolatore, ma soprattutto uno scienziato dalle idee larghe e con vedute moderne. Intendeva Backlund che ciò che costituì la gloria immortale di Lagrange e di Laplace, gli alti problemi dipendenti da masse e distanze, oggidì non bastano a soddisfare la curiosità scientifica umana che osò, dopo Guglielmo Herschel, di porsi a contatto dei corpi celesti analizzando l'energia luminosa.

Senonchè il clima di Pulkowa male risponde agli studi dell'astro-fisica, donde la creazione a Simeis in Crimea d'un osservatorio succursale.

L'Italia aveva bene apprezzati i meriti altissimi di Backlund; egli, oltre essere nostro Collega come Socio straniero nella sezione d'astronomia, era uno dei 12 membri della Società italiana delle scienze detta dei XL. Di lui vi dissi quanto potevo nella brev'ora concessami; mi dorrebbe che la severa figura dell'eminente scienziato svedese, per deficienza mia, vi apparisse men bella.

## ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, si procedette alle elezioni di Soci e Corrispondenti dell'Accademia. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Fu eletto Socio nazionale:

Nella Categoria IV, per la *Fisiologia*: ALBERTONI PIETRO.

Furono eletti Corrispondenti:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: FUBINI GUIDO: per l'*Astronomia*: ANGELITTI FILIPPO: per la *Geografia matematica e fisica*: DE MARCHI LUIGI.

Nella Categoria II, per la *Cristallografia e Mineralogia*: BOERIS GIOVANNI.

L'esito delle votazioni venne proclamato dal Presidente con Circolare del 22 dicembre 1916; la nomina del Socio nazionale fu sottoposta all'approvazione Sovrana.

## MEMORIE

### DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

U. PRATOLONGO. *Studi di chimica cinetica*. Pres. dal Socio MENOZZI.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio MARCHIAFAVA, relatore, a nome anche dei Soci TODARO e GRASSI, legge una Relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi accademici, della Memoria del prof. A. NAZARI, intitolata: *Chiazze e noduli pigmentali emosiderinici dell'epicardio*.

Il Corrispondente DI LEGGE, relatore, a nome anche del Socio CELORIA, legge una Relazione colla quale si fa una proposta analoga alla precedente,



per la Memoria del dott. G. ZAPPA avente per titolo: *Differenze sistematiche tra il Catalogo fondamentale di Newcomb e quello di Auncers.*

Le proposte delle due Commissioni esaminatrici sopra ricordate, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio DINI presenta il 3° volume delle *Opere* di LUIGI CREMONA, dandone la seguente notizia:

Il 3° volume delle *Opere* di L. Cremona contiene 36 lavori che si riferiscono a vari argomenti geometrici ed analitici, fra i quali la classica Memoria sulle superficie di 3° ordine, i numerosi ed importantissimi lavori sulle superficie rappresentabili sopra un piano e sulle trasformazioni razionali nello spazio, l'elegante teoria delle figure reciproche nella Statica grafica, ecc.

In questo 3° volume, col quale la pubblicazione è compiuta, sono contenute, oltre le Note dei revisori, anche le Notizie della vita e delle Opere di Cremona e una Distribuzione in ordine alfabetico dei principali argomenti trattati nei tre volumi.

Per questo 3° volume i revisori furono 16 e i loro nomi trovansi indicati a pag. 507 del volume stesso.

### CONCORSI A PREMI

Il Presidente BÒITI comunica alla Classe il seguente Elenco dei concorrenti al premio Reale per la *Mineralogia* e *Geologia* del 1916.

Elenco dei concorrenti al premio Reale  
per la *Mineralogia* e *Geologia*.

(Scadenza 31 dicembre 1916. — Premio L. 10.000).

1. DAINELLI GIOTTO. 1) « La fauna eocenica di Bribir in Dalmazia » (st.) —
- 2) « Intorno alla nomenclatura delle morene secondo recenti studi » (st.) —
- 3) « *Vaccinites (Pironaea) polystylus* pirona nel cretaceo del Capo di Leuca » (st.) — 4) « Molluschi eocenici di Dalmazia » (st.) — 5) « Progressi e problemi della glaciologia » (st.) — 6) « Contemporaneità dei depositi vulcanici e glaciali in provincia di Roma » (st.) — 7) « Dell'Ertà-Alè. Vulcano ritenuto attivo della Dancalia Settentrionale » (st.) — 8) « Vulcani attivi della Dancalia » (st.) — 9) « Escursione al Vulcano Alid (colonia Eritrea) » (st.) — 10) « Per l'organizzazione dello studio dei



ghiacciai in Italia » (st.) — 11) « Del Marahò-Vulcano estinto della depressione dancalia; (in collaborazione con O. Marinelli) » (st.) — 12) « A proposito di moderne manifestazioni di attività vulcanica in Dancalia; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 13) « Sopra la posizione del vulcano Afderà in Dancalia; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 14) — « Cavità di erosione nei gessi del Moncenisio » (st.) — 15) « Materiali per la climatologia d'Italia. Carta delle piogge della regione toscana » (st.) — 16) « Alcune notizie sopra i ghiacciai delle valli di Gressoney e di Ayas (Gruppo del M. Rosa) » (st.) — 17) « Carta geologica della Regione Etiopica » (st.) — 18) « A proposito di una nostra carta geologica; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 19) « Le meteore di Tessaglia » (st.) — 20) « Il ghiacciaio del Lys (Monte Rosa) » (st.) — 21) « Introduzione allo studio del cretaceo friulano » (st.) — 22) « I terremoti nella regione Eritrea; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 23) « Carta della permeabilità delle rocce del bacino del Cellina » (st.) — 24) « Risultati scientifici di un viaggio nella Colonia Eritrea; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 25) « L'Eocene friulano. Monografia geologica e paleontologica » (st.).

2. DAL PIAZ GIORGIO. 1) « Gli Odontoceti del Miocene bellunese » (st.) — 2) « Le Alpi Feltrine. Studio geologico » (st.) — 3) « Sulla fauna liasica delle tranze di Sospirolo » (st.) — 4) « Nuovo giacimento fossilifero del Lias inferiore dei sette comuni (Vicentino) » (st.) — 5) « Sulla fauna batoniana del Monte Pastello nel Veronese » (st.) — 6) « Sull'età degli strati coralligeni di Monte Zovo presso Mori nel Trentino » (st.) — 7) « Sulla tectonica dei Monti fra il Brenta e i dintorni del Lago di S. Croce » (st.) — 8) « Studi geotettonici sulle Alpi Orientali » (st.) — 9) « Geologia dell'Antelao » (st.) — 10) « Altipiano del Cansiglio e Regione circostante » (st.) — 11) « Relazione della Commissione per lo studio dell'Albania » (st.) — 12) « Guida geologico-morfologica di Primiero e del Bacino dell'Avisio ». (ms.)

3. FRANCHI SECONDO. 1) « Relazione sulle escursioni in valle d'Aosta » (st.) — 2) « I terreni secondari a ' facies piemontese ' ed i calcari cristallini a crinoidi intercalati nei calcescisti presso Villeneuve, in Valle d'Aosta. Bibliografia ragionata dei principali lavori concernenti la cronologia dei terreni a « facies piemontese » (zona delle pietre verdi, *schistes lustrés*, *Bündnerschiefer Schieferhülle*) » (st.) — 3) « Relazione preliminare sulla campagna geologica dell'anno 1911 » (st.) — 4) « Il Retico quale zona di transizione fra la Dolomia principale ed il *Lias* a ' facies piemontese ' calcescisti con Belemniti e pietre verdi. Nell'Alta Valle di Susa » (st.) — 5) « L'età e la struttura della sindinale piemontese dopo la scoperta del Retico nell'Alta Valle di Susa » (st.) — 6) « Osservazioni sulla geologia della Liguria » (st.) — 7) « Le ' Arenarie di Annot ' e la ' Zona ad Helminthoida ' nell'Eocene delle Alpi marittime e dell'Appennino Geno-

vese » (st.) — 8) « Carta geologica delle Alpi Occidentali » (st.) — 9) « Fogli di *Oulx* e di *Cesana Torinese*, colla indicazione del Retico scoperto nel 1910 » (st.).

4. REPOSSI EMILIO. 1) « Osservazioni geologiche e petrografiche sulla bassa Valle della Mera » (st.) — 2) « I filoni pegmatitici di Olgiasca rinvenimento in essi di minerali d'uranio » (st.) — 3) « Il quarzo di Gugiato » (st.) — 4) « Il crisoberillo nella pegmatite di Olgiasca » (st.) — 5) « L'andalusite di Musso » (st.) — 6) « Su alcuni minerali del granito di S. Fedelino (Lago di Como) » (st.) — 7) « La bassa valle della Mera, studi petrografici e geologici » (st. e ms.).

5. SABATINI VENTURINO. 1) « I terremoti e le grandi catastrofi prodotte dai fenomeni sismici » (st.). — 2) « L'eruzione vesuviana dell'aprile 1906 » (st.). — 3) « I vetri forati di S. Giuseppe e d'Ottoiano durante l'eruzione vesuviana del 1906 » (st.). — 4) « Contribuzione allo studio dei terremoti calabresi » (st.). — 5) « Analogie fra monte Amiata e monte Cimino » (st.). — 6) « I vulcani dell'Italia centrale e i loro prodotti. Vulcani Cimini » (st.). — 7) « Note sul terremoto di Linera dell'8 maggio 1914 » (st.). — 8) « Considerazioni sismologiche. A proposito dell'area epicentrale del terremoto di Linera dell'8 maggio 1914 » (st.).

Il PRESIDENTE informa la Classe che al concorso al premio CARPI pel biennio 1915-1916, scaduto col 31 dicembre 1916, non si è presentato alcun concorrente.

E. M.

---



OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA  
*presentate nella seduta del 7 gennaio 1917.*

- BADET A. — Arithmetique. Bello Horizonte, 1916. 8°, pagg. 1-28.
- BERNARDINI F. — Sui rapporti fra lo sviluppo della « Fioretta » e l'annacquamento dei vini (Estr. da « Le stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. XLIX, pagg. 437-496). Modena, 1916. 8°.
- BOCCARDI G. — Il mio « Credo » riguardo alla variazione delle latitudini (Estr. da « Saggi di astronomia popolare », an. VI, pagg. 1-6). Torino, 1916. 8°.
- CREMONA L. — Opere matematiche, vol. III. Milano, 1917. 4°, pagg. 1-620.
- DE TONI G. B. — Rassegna di mostruosità florali in individui di *digitalis purpurea* l. coltivati nel giardino pubblico di Modena. (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena », vol. XII, pagg. 1-16). Modena, 1916. 4°.
- EREDIA F. — Strumenti e osservazioni di meteorologia, con norme sul servizio meteorico nelle Colonie. Firenze, 1916. 8°, pagg. 1-162.
- PEROTTI R. — Sui rapporti fra lo sviluppo della « Fioretta » e l'annacquamento dei vini. (Estr. da « Le stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. XLIX, pagg. 437-496). Modena, 1916. 8°.
- PEYRONEL B. — Una nuova malattia del lupino, prodotta da *chalaropsis thielavioides* Peyr. nov. gen. et nova sp. (Estr. da « Le stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. XLIX, pagg. 583-596). Modena, 1916. 8°.
-